2024 年全国硕士研究生入学统一考试试题

数学一试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

【1】已知函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$， $g(x)=\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，则

（A） $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数． （B） $f(x)$ 为偶函数， $g(x)$ 为奇函数．

（C） $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数． （D） $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数．

【答案】(C)

【2】设 $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$

（A） $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （B） $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（C） $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （D） $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

【答案】(A)

【3】已知幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

（A） $-\frac{1}{6}$． （B） $-\frac{1}{3}$． （C） $\frac{1}{6}$． （D） $\frac{1}{3}$．

【答案】(A)

【4】设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则

（A）当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$ 时， $f'(0)=m$．

（B）当 $f'(0)=m$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=m$．

（C）当 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$ 时， $f'(0)=m$．

（D）当 $f'(0)=m$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$．

【答案】(B)

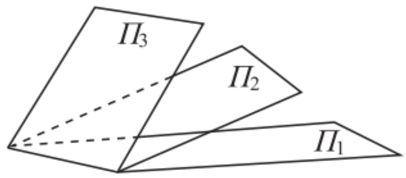
【5】在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三张平面 $\pi_i: a_i x+b_i y+c_i z=d_i$ $(i=1,2,3)$ 位置关系如图所示，记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$，若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=n$，则

(A) $m=1,n=2$.

(B) $m=n=2$.

(C) $m=2,n=3$.

(D) $m=n=3$.



【答案】(B)

【6】设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若 α_1，α_2，α_3 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

(A) $a=1,b\neq-1$　　(B) $a=1,b=-1$

(C) $a\neq-2,b=2$　　(D) $a=-2,b=2$

【答案】(D)

【7】设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\mathbf{0}$ 的非零向量，若对满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 的任意向量 $\boldsymbol{\beta}$，均有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}$，则

(A) $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 2.　　(B) $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 5.

(C) $\boldsymbol{A}^5$ 的迹为 7.　　(D) $\boldsymbol{A}^5$ 的迹为 9.

【答案】(A)

【8】设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 是服从 $N(0,2)$ 的正态分布，Y 是服从 $N(-2,2)$ 的正态分布，若 $P\{2X+Y<a\}=P\{X>Y\}$，则 $a=$

(A) $-2-\sqrt{10}$　　(B) $-2+\sqrt{10}$

(C) $-2-\sqrt{6}$　　(D) $-2+\sqrt{6}$

【答案】(B)

【9】设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x),0<x<1\\0, \qquad\qquad 其他\end{cases}$，在 $X=x$ 的条件下，Y 在区间 $(x,1)$ 上服从均匀分布，则$\operatorname{cov}(X,Y)=$

（A）$-\frac{1}{36}$　　　　（B）$-\frac{1}{72}$

（C）$\frac{1}{72}$　　　　（D）$\frac{1}{36}$

【答案】(D)

【10】设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从参数为 λ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$，则下列与 Z 服从同一分布的是

（A）$X+Y$　　　　（B）$\frac{X+Y}{2}$

（C）$2X$　　　　（D）X

【答案】(D)

二、填空题：11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

【11】若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$________.

【答案】6

【12】设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续导数，且 $\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$，若 $y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$________.

【答案】5

【13】若函数 $f(x)=x+1$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，$x\in[0,\pi]$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$________.

【答案】$-\frac{1}{\pi}$

【14】微分方程 $y'=\frac{1}{(x+y)^2}$，满足条件 $y(1)=0$ 的解为________.

【答案】$x=\tan(y+\frac{\pi}{4})-y$.

【15】设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$，若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，且满足

$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2 \leqslant \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 都成立，则 a 的取值范围_________.

【答案】$a \geqslant 0$.

【16】随机试验每次成功的概率为 p，现进行三次独立重复实验，已知至少成功一次的条件下全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 $p=$_________.

【答案】$\frac{2}{3}$

三、解答题：17～22 小题,共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

【17】（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)|\sqrt{1-y^2}\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$,计算 $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$.

【答案】$\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-2$

【18】（本题满分 12 分）

设 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$，曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面为 T，T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的投影为 D .

（1）求 T 的方程

（2）求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值

【答案】切平面 $x+y+z=3$；最大值 21，最小值 $\frac{17}{27}$.

【19】（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=f'(0),|f''(x)|\le 1$，证：

（1）$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le \frac{x(1-x)}{2}$.

（2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le \frac{1}{12}$

【答案】(1) 分别在 $x=0$ 及 $x=1$ 处使用泰勒公式展开.

(2) 对于 (1) 结果两边同时积分.

【20】（本题满分 12 分）

已知有向曲线 $\boldsymbol{L}$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 $2x-z-1=0$ 的交线从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分

$$\int_L (6xyz-yz^2)\mathrm{d}x+2x^2z\mathrm{d}y+xyz\mathrm{d}z$$

【答案】$\dfrac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

【21】（本题满分 12 分）

已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1,y_0=0,z_0=2,$ 且 $\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$，

记 $\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$，写出满足 $\alpha_n=A\alpha_{n-1}$ 的矩阵 A，并求 A^n 及 $x_n,y_n,z_n(n=1,2,\cdots)$.

【答案】$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A^n=\begin{pmatrix} -4+(-1)^{n+1}2^n & -2+(-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4+(-1)^n 2^{n+1} & 2+(-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$x_n=8+(-2)^n, y_n=-8+(-2)^{n+1}, z_n=12.$

【22】（本题满分 12 分）

设总体 $X\sim U(0,\theta)$，θ 未知，$X_1,X_2\cdots X_n$ 为简单随机样本，$X_{(n)}=\max(X_1,X_2\cdots X_n)$，$T_c=cX_{(n)}$.

（1）求 c 时，使得 T_c 为 θ 的无偏估计.

（2）记 $h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求 c 使得 $h(c)$ 取最小值.

【答案】（1）$c=\dfrac{n+1}{n}$；（2）$c=\dfrac{n+2}{n+1}$.