

2024 考研数学（三） 真题

试卷及解析

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}}$ ，则 $f(x)$

- A. 在 $x=1$ ， $x=-1$ 处都连续.
- B. 在 $x=1$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续.
- C. 在 $x=1$ ， $x=-1$ 处都不连续.
- D. 在 $x=1$ 处不连续，在 $x=-1$ 处连续.

1. 【答案】D

【解析】当 $|x| < 1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}} = 1+x$ ，

当 $|x| > 1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}} = 0$ ，

当 $x=1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+n} = 0$ ，

当 $x=-1$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1+n} = 0$ ，

故 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 故在 $x=-1$ 时，连续； $x=1$ 时不连续。选 D.

2. 设 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$ ， k 为整数，则 I 的值

- A. 只与 a 有关
- B. 只与 k 有关
- C. 与 a, k 均有关

D. 与 a, k 均无关

2. 【答案】B

【解析】 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$

$$= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx = k \int_0^{\pi} \sin x dx = 2k.$$

选 B.

3. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy =$

A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx.$

B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx.$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx.$

D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx.$

3. 【答案】A

【解析】 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx.$

选 A.

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} =$

A. $-\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

4. 【答案】A

$$\begin{aligned}\text{【解析】}\ln(2+x) &= \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \ln 2 = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} \\ &= \ln 2 + \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4} + \cdots - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} na_{2n} &= 0 + a_2 + 2a_4 + 3a_6 + 4a_8 + \cdots \\ &= -\frac{1}{2 \cdot 2^2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2^4 \cdot 4}\right) - 3 \frac{1}{2^6 \cdot 6} + \cdots \\ &= -\left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \cdots\right] \\ &= -\left[\frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2^2}}\right] = -\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{8} \times \frac{4}{3} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换下可化成 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 则二次型 f 的矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式与迹分别为

A. $-6, -2$ B. $6, -2$ C. $-6, 2$ D. $6, 2$

5. 【答案】C

【解析】 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正交变换下化为 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2 \Rightarrow \mathbf{A}$ 的特征值为 $1, -2, 3$

$$\Rightarrow |\mathbf{A}| = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6, \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 1 + (-2) + 3 = 2.$$

6. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶矩阵, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A} =$

A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$

B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$

C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$

D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$

6. 【答案】 C

【解析】 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} = B$, 且 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{31}(1)$

故 $A = (P^T)^{-1} B (P^2)^{-1} = (E_{31}^T(1))^{-1} B [E_{31}^2(1)]^{-1}$

$= [E_{31}^{-1}(1)]^T B E_{31}^{-1}(1) E_{31}^{-1}(1) = E_{31}^T(-1) B E_{31}(-1) E_{31}(-1)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 表示 A 的行 j 列元素的余子式, 若 $|A| = -\frac{1}{2}$. 且

$-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$. 则

$A.a = 0$ 或 $a = -\frac{3}{2}$

$$B. a=0 \text{ 或 } a=\frac{3}{2}$$

$$C. b=1 \text{ 或 } b=-\frac{1}{2}$$

$$D. b=-1 \text{ 或 } b=\frac{1}{2}$$

7. 【答案】B

$$\text{【解析】 } |A| = \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{2} & 2 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{2}-1 & 0 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{b}{2} - 1 \right) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{b}{2} - 1 \right) (2a - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{2} - 1 \right) (2a - 1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ab - 2a - \frac{b}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } 0 = -M_{21} + M_{22} - M_{23} = A_{21} + A_{22} + A_{23}$$

$$= \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a+1-b=0,$$

$$\Rightarrow b = a + 1 \text{ 代入(1)中, 得 } a(a+1) - 2a - \frac{a+1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 1 \text{ 或 } \frac{5}{2}.$$

8. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 X 的三阶中心矩

$$E(X - EX)^3 =$$

- A. $-\frac{1}{32}$ B. 0 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 【答案】B

$$\text{【解析】 } EX = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = 6 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$E\left(X - \frac{1}{2}\right)^3 = \int_0^1 6x(1-x)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 dx \xrightarrow{\text{令 } x - \frac{1}{2} = t} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 6\left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - t\right) \cdot t^3 dt = 0.$$

9. 随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 2), Y \sim N(-1, 1)$, 设

$$p_1 = P\{2X > Y\}, p_2 = P\{X - 2Y > 1\}, \text{ 则}$$

- A. $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$ B. $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$
C. $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ D. $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$

9. 【答案】B

$$\text{【解析】 } E(2X - Y) = 2EX - EY = 0 + 1 = 1, D(2X - Y) = 4DX + DY = 4 \times 2 + 1 = 9,$$

所以 $2X - Y \sim N(1, 9)$;

$$E(X - 2Y) = EX - 2EY = 0 + 2 = 2, D(X - 2Y) = DX + 4DY = 2 + 4 = 6,$$

所以 $X - 2Y \sim N(2, 6)$;

$$p_1 = P\left\{\frac{2X-Y-1}{3} > \frac{0-1}{3}\right\} = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$p_2 = P\left\{\frac{X-2Y-2}{\sqrt{6}} > \frac{1-2}{\sqrt{6}}\right\} = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

所以 $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$, 故选 B.

10. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与 Z 同分布的是

A. $X + Y$

B. $\frac{X + Y}{2}$

C. $2X$

D. X

10. 【答案】D

【解析】 X 与 Y 的联合概率密度为 $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{|X - Y| \leq z\}$

① 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

② 当 $z \geq 0$ 时, $F_Z(z) = P\{-z \leq X - Y \leq z\} = 2P\{0 \leq X - Y \leq z\}$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_y^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} (e^{-\lambda y} - e^{-\lambda(y+z)}) dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda y} dy - 2e^{-\lambda z} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-2\lambda y} dy \\ &= 1 - e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

所以 $Z \sim E(1)$, 从而 Z 与 X 服从相同的分布, 选 D.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t} dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 【答案】3

【解析】当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{(1+x^2)\sin x^2}{1+\cos^2 x} \sim \frac{x^2}{2},$$

则 $\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t} dt \sim Ax^3$. 从而 $k=3$.

12. $\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4} dx =$ _____.

12. 【答案】 $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{8}$

【解析】 $\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4} dx = \int_2^{+\infty} \frac{5}{(x^2-1)(x^2+4)} dx$

$$= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx - \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$$
$$= \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_2^{+\infty} - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2} \left(0 - \ln \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{8}.$$

13. 函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是_____.

13. 【答案】 (1,1)

【解析】 $\begin{cases} f'_x = 6x^2 - 18x + 12 = 0, \\ f'_y = -24y^3 + 24 = 0, \end{cases}$

解得 (1,1), (2,1). $A = f''_{xx} = 12x - 18$, $B = f''_{xy} = 0$, $C = f''_{yy} = -72y^2$,

代入 (1,1) 得 $AC - B^2 = 432 > 0$, $A = -6$, 故 (1,1) 是极大值点, $f(1,1) = 23$.

代入 (2,1) 得 $AC - B^2 = -432 < 0$, 不是极值.

14. 某产品的价格函数是 $p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, & Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, & Q > 20 \end{cases}$ (p 为单价, 单位: 万元; Q 为产量,

单位: 件), 总成本函数为 $C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$ (万元), 则经营该产品可获得的最大利润为_____ (万元).

14. 【答案】50

$$\text{【解析】 } L = PQ - C = \begin{cases} (25 - 0.25Q)Q - (150 + 5Q + 0.25Q^2), & Q \leq 20, \\ (35 - 0.75Q)Q - (150 + 5Q + 0.25Q^2), & Q > 20. \end{cases}$$

$$\text{整理得: } L = \begin{cases} -0.5(Q - 20)^2 + 50, & Q \leq 20, \\ -(Q - 15)^2 + 75, & Q > 20. \end{cases}$$

所以 $Q = 20$ 时, $L = 50$ 为最大利润.

15. 设 A 为 3 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵, 若

$$r(2E - A) = 1, r(E + A) = 2, \text{ 则 } |A^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 【答案】16

$$\text{【解析】 } r(2E - A) = 1 < 3, \quad r(E + A) = 2 < 3 \Rightarrow A \text{ 有特征值 } 2, -1.$$

又 $3 - r(2E - A) = 2 \Rightarrow \lambda = 2$ 有 2 个线性无关的特征向量 $\Rightarrow \lambda = 2$ 至少有两重根.

$$3 - r(E + A) = 1 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ 有 1 个线性无关特征向量} \Rightarrow \lambda = -1 \text{ 至少有一重根.}$$

又 A 为 3 阶 $\Rightarrow A$ 的特征值为 2, 2, -1, 故

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4, |A^*| = |A|^{n-1} = |A|^2 = 16.$$

16. 设随机试验每次成功的概率为 p , 现进行 3 次独立重复试验, 在至少成功 1 次的条件下,

$$3 \text{ 次试验全部成功的概率为 } \frac{4}{13}, \text{ 则 } p = \underline{\hspace{2cm}}.$$

16. 【答案】 $p = \frac{2}{3}$

【解析】 A: 全成功, B: 至少成功一次.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{p^3}{1-(1-p)^3} = \frac{4}{13},$$

$$13p^3 = 4 - 4(1-p)^3$$

$$\text{整理得 } p(3p-2)(3p+6)=0 \Rightarrow p = \frac{2}{3}.$$

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设平面有界区域 D 位于第一象限由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$ 围成, 计

$$\text{算 } \iint_D (1+x-y) dx dy.$$

17. 【解】 令 $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$,

$$(1) \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

$$(2) J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$$\text{故原式} = \int_{\frac{1}{3}}^3 du \int_{\frac{1}{3}}^3 \left(1 + \sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{uv} \right) \frac{1}{2v} \cdot dv = \frac{8}{3} \ln 3.$$

18. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^x - y \ln(1+z^2) = 0$ 确定, 求 $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Big|_{(0,0)}.$

18. 【解】 将 $y = 0$ 代入得 $z = -e^x$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^x$, 代 $x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = -1.$

将 $x = 0$ 代入得 $z + 1 = y \ln(1+z^2)$, 得 $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(1+z^2) + \frac{2yz}{1+z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$

代 $x=0, y=0, z=-1$ 得 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \ln 2$.

又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \cdot \left[\frac{\partial \left(\frac{z}{1+z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y} \right],$$

代 $x=0, y=0, z=-1, \frac{\partial z}{\partial y} = \ln 2$ 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} = -2\ln 2.$$

故原式为 $-1 - 2\ln 2$.

19. 设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = xe^{-2x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

19. 【解】 $S(t) = \int_t^{2t} xe^{-2x} dx$, 则 $S'(t) = 4te^{-4t} - te^{-2t} = te^{-4t}(4 - e^{2t})$,

令 $4e^{-4t} - e^{-2t} = 0 \Rightarrow t = \ln 2$.

当 $0 < t < \ln 2$ 时, $S'(t) > 0$; 当 $t > \ln 2$ 时, $S'(t) < 0$. 故 $t = \ln 2$ 时, $S(t)$ 取最大值, 有

$$S(\ln 2) = \int_{\ln 2}^{\ln 4} xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left(xe^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \frac{1}{16} \ln 2 + \frac{3}{64}.$$

20. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1), |f''(x)| \leq 1$. 证明:

(1) 当 $x \in (0,1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2};$

(2) $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}.$

20. 证明: (1)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2 \quad \textcircled{1}$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \cdot (1-x) + \textcircled{2} \cdot x$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + f'(0)x(1-x) + f'(1)(x-1)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2x$$

,

$$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{1}{2}x^2(1-x) + \frac{1}{2}x(1-x) = \frac{1}{2}x(1-x)(x+1-x) = \frac{1}{2}x(1-x).$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \left| \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \right| &= \left| \int_0^1 f(x) dx - f(0) \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \Big|_1^0 - f(1) \cdot \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

21. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明: 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解;

(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 求 a 的值.

21. 证明: (1)

$$Ax = \alpha \Rightarrow (A, \alpha) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$Bx = \beta \Rightarrow (B, \beta) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

又

$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故}$$

$$r(A, \alpha) = r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = 3.$$

即 $(A, \alpha) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 的解是 $(B, \beta) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 的解.

即 $Ax = \alpha$ 的解是 $Bx = \beta$ 的解

(2) $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 即 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 不等价

又 $Ax = \alpha$ 的解是 $Bx = \beta$ 的解, 故 $Bx = \beta$ 的解不是 $Ax = \alpha$ 的解.

即 $r(\mathbf{B}, \boldsymbol{\beta}) \neq r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{B} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = 3$, 故

$$\mathbf{B}, \boldsymbol{\beta} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-1 & a-3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 3-a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

故 $1-a=0$ 即 $a=1$.

22. X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单

随机样本, 记为 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求 c 使得 $E(T_c) = \theta$;

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $f(c)$ 最小.

22. 【解】(1) $E[cX_{(n)}] = cEX_{(n)} = cE \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = \theta$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$$

$$\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \sim F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} \cdot x^{n-1} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$E \max \{X_1, \dots, X_n\} = \int_0^\theta \frac{nx}{\theta^n} x^{n-1} d\theta = \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{n}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta,$$

$$\text{所以 } c = \frac{n+1}{n}.$$

$$(2) \quad h(c) = E(T_c^2 + \theta^2 - 2T_c\theta) = ET_c^2 + E\theta^2 + 2\theta ET_c$$

$$= E(cX_{(n)})^2 + \theta^2 - 2\theta E(cX_{(n)}) = c^2 EX_{(n)}^2 + \theta^2 - 2c\theta EX_{(n)}$$

$$\text{因为 } EX_{(n)}^2 = \int_0^\theta \frac{nx^2}{\theta^n} \cdot x^{n-1} dx = \frac{1}{\theta^n} \frac{n}{n+2} x^{n+2} \Big|_0^\theta = \theta^2 \cdot \frac{n}{n+2}$$

$$EX_{(n)} = \int_0^\theta \frac{nx}{\theta^n} \cdot x^{n-1} dx = \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{n}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta$$

$$\text{所以 } h(c) = \frac{n}{n+2} c^2 \theta^2 + \theta^2 - 2c\theta \cdot \frac{n}{n+1} \theta = \left(\frac{nc^2}{n+2} + 1 - 2c \cdot \frac{n}{n+1} \right) \theta^2$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{n}{n+2} x^2 + 1 - 2 \frac{n}{n+1} x, \quad f'(x) = \frac{2n}{n+2} x - \frac{2n}{n+1} = 0$$

$$\text{解得 } x = \frac{n+2}{n+1}, \text{ 即 } c = \frac{n+2}{n+1} \text{ 时, } h(c) \text{ 取最小值.}$$