

2024 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题解析

一、选择题:1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分。下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 函数 $f(x) = \left| x \right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数是 ()

(A)3 (B)2 (C)1 (D)0

【答案】(C)

【解析】无定义的点为 1, 2, 0

$\lim_{x \rightarrow 1} \left| x \right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}} = e$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left| x \right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| x \right|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}} = +\infty$, 所以第一类间断点的个数是 1 个, 故选 C.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$ 确定, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[f(2 + \frac{2}{x}) - f(2)] = ()$

(A) $2e$ (B) $\frac{4e}{3}$ (C) $\frac{2e}{3}$ (D) $\frac{e}{3}$

【答案】(B)

【解析】容易看出函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{t^2} 2t}{3t^2}$, 当 $x = 2, t = 1$ 时, $f'(2) = \frac{e^{t^2} 2t}{3t^2} \Big|_{t=1} = \frac{2}{3}e$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(f\left(2 + \frac{2}{x}\right) - f(2) \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(f\left(2 + \frac{2}{x}\right) - f(2) \right)}{\frac{2}{x}} = 2f'(2) = \frac{4}{3}e,$$

故选 B

(3) 设函数 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^3 dt, g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 ()

(A) $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是奇函数 (B) $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数

(C) $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是偶函数 (D) $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数

【答案】(D)

【解析】令 $h(x) = \int_0^x \sin t^3 dt$, 此时 $h(x)$ 是一个偶函数, 所以, $f(x) = h(\sin x)$ 为偶函数, 从而 $g(x)$ 为奇函数, 故选 D.

(4) 已知数列 $\{a_n\} (a_n \neq 0)$, 若 $\{a_n\}$ 发散, 则 ()

(A) $\left\{ a_n + \frac{1}{a_n} \right\}$ 发散 (B) $\left\{ a_n - \frac{1}{a_n} \right\}$ 发散 (C) $\left\{ e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}} \right\}$ 发散 (D) $\left\{ e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}} \right\}$ 发散

【答案】 (D)

【解析】 对于 A 选项, 令 $a_n = 2, \frac{1}{2}, 2, \dots, u_n = a_n + \frac{1}{a_n} = \frac{5}{2}$, 所以 $\left\{a_n + \frac{1}{a_n}\right\}$ 收敛;

对于 B 选项, 令 $a_n = (-1)^{n-1}$, 此时 $u_n = a_n - \frac{1}{a_n} = 0$, 所以 $\left\{a_n - \frac{1}{a_n}\right\}$ 收敛;

对于 C 选项, 令 $a_n = (-1)^n$, $u_n = e^{a_n} + e^{-a_n} = e + e^{-1}$ 收敛, 故选 D。

(5) 已知函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$, 则在点 $(0, 0)$ 处 ()

- (A) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 可微 (B) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 不可微
(C) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 可微 (D) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x, y)$ 不可微

【答案】 (C)

【解析】 $(0, 0)$ 点处, $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$, 同理

$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}, x \neq 0$ 时, $f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{xy} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \cos \frac{1}{xy}$; 因

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{xy} = 0 \end{aligned}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处可微, 排除 B 和 C; 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f'_x(x, y)$ 极限不存在, 故 $f'_x(x, y)$ 在

$(0, 0)$ 点处不连续, 故选 C.

(6) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- (A) $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ (B) $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
(C) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

【答案】 (A)

【解析】积分区域为 $D: \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \sin x \leq y \leq 1$ ，故交换积分次序得

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx, \text{ 故选 A.}$$

(7) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 给出以下三个命题:

①若 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

②若存在 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

③若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则存在 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在.

其中真命题个数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】(B)

【解析】

若 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 dx$ 收敛, 但 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$, 故①错误.

当 $p > 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 故根据比较判别法, 可知 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 故

②正确.

令 $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$, 当 $p > 1$ 时, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = +\infty$ 不存在, 故③错误.

(8) 设 A 为 3 阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

【答案】(C)

【解析】由 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^2)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ 故选 (C).}$$

(9) 设 A 为 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $A(A - A^*) = 0$, 且 $A \neq A^*$, 则 $r(A)$ 取值为 ()

(A) 0 或 1 (B) 1 或 3 (C) 2 或 3 (D) 1 或 2

【答案】(D)

【解析】由题设知 $r(A) + r(A - A^*) \leq 4$, $A^2 = AA^* = |A|E$, 又因为 $r(A - A^*) \geq 1$, 则 $1 \leq r(A) \leq 3$,则 $A^2 = O$, 故, $r(A) + r(A) \leq 4$, 即 $r(A) \leq 2$, 综上 $1 \leq r(A) \leq 2$, 故选(D).(10) 设 A, B 为 2 阶矩阵, 且 $AB = BA$, 则 “ A 有两个不相等的特征值” 是 “ B 可对角化” 的 ()(A) 充分必要条件 (B) 充分不必要条件
(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】(B)

【解析】设 $A\alpha = \lambda\alpha$, 同左乘 B 得 $BA\alpha = \lambda B\alpha$, 即 $AB\alpha = \lambda B\alpha$, ①若 $B\alpha \neq 0$, 则 $B\alpha$ 为 A 对应于 λ 的特征向量, 则 $B\alpha = k\alpha (k \neq 0)$, 则 α 为 B 对应于 $\lambda = k$ 的特征向量. ②若 $B\alpha = 0$, 则若 $B\alpha = 0 \cdot \alpha$, 则 α 为 B 对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量, 综上: α 必为 B 的特征向量, 即 A 的特征向量都是 B 的特征向量, 同理 B 的特征向量都是 A 的特征向量. 所以 “ A 有两个不相等的特征值”, 故 A 有两个线性无关特征向量, 所以 B 有两个线性无关特征向量, 故 “ B 可对角化”, 反之不对, 例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}, AB = BA, “B 可对角化”, 但是 A 的特征值是重根. 故选 (B)$$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 曲线 $y^2 = x$ 在 $(0,0)$ 处的曲率方程为 _____【答案】 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 或 $x^2 - x + y^2 = 0$

【解析】曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = y^2 \\ y = y \end{cases}$, 由曲率公式 $K = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$ 得: 在 $(0,0)$ 处的曲率

$K = 2$, 则 $(0,0)$ 处的曲率半径 $R = \frac{1}{2}$, 又曲线在 $(0,0)$ 处的切线为 y 轴, 则曲率中心为 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 故曲率圆的

方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, 即 $x^2 - x + y^2 = 0$.

(12) 函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是 _____

【答案】(1,1)

【解析】由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ f'_y(x, y) = -24y^3 + 24 = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(1,1)$ 和 $(2,1)$

$$f''_{xx}(x, y) = 12x - 18, f''_{yy}(x, y) = -72y^2, f''_{xy}(x, y) = 0$$

对于驻点 $(1,1)$: $A = -6, B = 0, C = -72$, 由 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 可知, 驻点 $(1,1)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点;

对于驻点 $(2,1)$: $A=6, B=0, C=-72$, 由 $AC-B^2 < 0$ 可知, 驻点 $(2,1)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点。

(13) 微分方程 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为 _____

【答案】 $y - \arctan(x+y) = -\frac{\pi}{4}$

【解析】 令 $x+y=u$, 等式两边同时对 x 求导, 得到 $u' = 1+y'$, 代入原式可得 $u' - 1 = \frac{1}{u^2}$, 整理得

$$\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{u^2}, \text{ 即 } \int \frac{u^2}{u^2+1} du = \int dx, \text{ 求得 } u - \arctan u = x + c,$$

即 $y - \arctan(x+y) = c$, 把初始条件代入可得 $c = -\frac{\pi}{4}$,

故解为: $y - \arctan(x+y) = -\frac{\pi}{4}$

(14) 已知函数 $f(x) = (e^x + 1)x^2$, 则 $f^{(5)}(1) =$ _____

【答案】 $31e$

【解析】 由莱布尼茨公式可得 $f^{(5)}(x) = C_5^0 (ex+1)^{(5)} x^2 + C_5^1 (e^x+1)^{(4)} 2x + C_5^2 (e^x+1)^{(3)} 2$

即 $f^{(5)}(1) = 31e$

(15) 某物体以速度 $v(t) = t + k \sin \pi t$ 做直线运动, 若它是从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度为 $\frac{5}{2}$,

则 $k =$ _____

【答案】 $\frac{3\pi}{2}$

【解析】 由函数的平均值公式可得 $\frac{\int_0^3 t + k \sin \pi t dt}{3} = \frac{5}{2}$; 解得 $k = \frac{3\pi}{2}$

(16) 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个向量

均线性无关, 则 $ab =$ _____

【答案】 -4

【解析】 $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & b & -1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix}$

由于任意两向量线性无关，则 $a \neq 1$

$$\text{则 } (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & b+1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$ ，则 $a = -2, b = 2$ ，故 $ab = -4$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本题满分 10 分)

设平面有界区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy = \frac{1}{3}, xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x, y = 3x$ 围成，计算

$$\iint_D (1+x-y) dx dy$$

【解析】积分区域的图像关于 $y = x$ 对称，由轮换对称性可得 $\iint_D (1+x-y) dx dy = \iint_D (1+y-x) dx dy$ ，

$$\text{故 } \iint_D (1+x-y) dx dy = \frac{1}{2} (\iint_D (1+x-y) dx dy + \iint_D (1+y-x) dx dy) = \iint_D 1 dx dy$$

$$\iint_D 1 dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x - \frac{1}{3x}) dx + \int_1^3 (\frac{3}{x} - \frac{x}{3}) dx = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln 3 + 3 \ln 3 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \ln 3$$

(18) (本题满分 12 分)

将 $y(x)$ 为微分方程 $x^2 y'' + xy' - 9y = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = 6$ 的解。

1) 利用变换 $x = e^t$ 将上述方程化为常系数方程，并求 $y(x)$ ；

2) 计算 $\int_1^2 y(x) \sqrt{4-x^2} dx$

【解析】(1) 对于 $x = e^t$ ，有 $t = \ln x$ ，得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \right) + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\text{从而原方程化为 } x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + x \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} - 9y = 0$$

$$\text{即 } \frac{d^2 y}{dt^2} - 9y = 0, \text{ 得通解 } y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} = C_1 x^3 + C_2 x^{-3},$$

代入 $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = 6$ ，解得 $C_1 = 2, C_2 = 0$ ，故 $y(x) = 2x^3$

$$\int_1^2 y(x) \sqrt{4-x^2} dx = \int_1^2 2x^3 \sqrt{4-x^2} dx = \int_1^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx \stackrel{t=4-x^2}{=} \int_0^3 (4-t) \sqrt{t} dt = 4 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = \frac{22}{5} \sqrt{3}$$

(19) (本题满分 12 分)

设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ 与直线 $x = t, x = 2t$ 及 x 轴旋转一周所成旋转的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的最大值。

$$\text{【解析】 } V(t) = \int_t^{2t} \pi x e^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} \left[(2t + \frac{1}{2})e^{-4t} - (t + \frac{1}{2})e^{-2t} \right]$$

$$\text{则 } V'(t) = -\pi t e^{-2t} (1 - 4e^{-2t}), \text{ 令 } V'(t) = 0 \Rightarrow t = \ln 2$$

$$\therefore t \in (\ln 2 - \delta, \ln 2), \text{ 有 } V'(t) > 0, \quad t \in (\ln 2, \ln 2 + \delta) \text{ 有 } V'(t) < 0,$$

$$\therefore t = \ln 2 \text{ 为 } V(t) \text{ 的极大值点即最大值点, 故最大值为 } V(\ln 2) = \frac{\pi}{16} (\ln 2 + \frac{3}{4})$$

(20) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 且函数 $g(x, y) = f(2x + y, 3x - y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1,$$

$$1) \text{ 求 } \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v};$$

$$2) \text{ 若 } \frac{\partial f(u, 0)}{\partial u} = u e^{-u}, f(0, v) = \frac{1}{50} v^2 - 1, \text{ 求 } f(u, v) \text{ 的表达式。}$$

$$\text{【解析】 } \frac{\partial g}{\partial x} = f'_1 \cdot 2 + f'_2 \cdot 3 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = f'_1 - f'_2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 4f''_{11} + 12f''_{12} + 9f''_{22}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2f''_{11} + f''_{12} - 3f''_{22}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = f''_{11} - 2f''_{12} + f''_{22}, \text{ 代入原方程: } 25f''_{12} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{1}{25} \Rightarrow f'_u = \frac{1}{25} v + c(u)$$

$$\text{又 } \because f'_u(u, 0) = u e^{-u} \Rightarrow c(u) = u e^{-u} \Rightarrow f'_u(u, v) = \frac{1}{25} v + u e^{-u} \text{ 两边对 } u \text{ 积分可得}$$

$$f(u, v) = \frac{1}{25} uv - e^{-u}(u + 1) + c(v)$$

$$\therefore f(0, v) = \frac{1}{50} v^2 - 1 \Rightarrow c(v) = \frac{1}{50} v^2$$

$$\therefore f(u, v) = \frac{1}{25} uv - e^{-u}(u + 1) + \frac{1}{50} v^2$$

(21) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1), |f''(x)| \leq 1$, 证明:

$$1) \text{ 当 } x \in (0,1) \text{ 时, } |f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2};$$

$$2) \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}.$$

【解析】(1) 证明: 令 $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$

$$\text{令 } F(x) = f(x) - g(x) - \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1), \quad F(0) = 0, F(1) = 0$$

$$\because F''(x) = f''(x) + 1 \geq 0, (|f''(x)| \leq 1), \therefore F(x) \text{ 为凹函数}, \therefore F(x) \leq 0$$

$$\therefore f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

$$\text{令 } F(x) = f(x) - g(x) + \frac{x(1-x)}{2}, x \in (0,1), \quad F(0) = 0, F(1) = 0$$

$$\because F''(x) = f''(x) - 1 \leq 0, (|f''(x)| \leq 1), \therefore F(x) \text{ 为凸函数}, \therefore F(x) \geq 0$$

$$\therefore f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$$

$$\text{综上: } |f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 中 } f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq \frac{1}{12}$$

$$\text{由第 (1) 中 } f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \geq \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \geq -\frac{1}{12}$$

$$\text{综上: } \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$$

(22) (本题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$, 已知方程组 $Ax = 0$ 的均解是

$B^T x = 0$ 的解, 但这两个方程组不同解。

1) 求 a, b 的值;

2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形。

【解析】(1) 由题知 $Ax = 0$ 与 $\begin{pmatrix} A \\ B^T \end{pmatrix} x = 0$ 同解, 故 $r\begin{pmatrix} A \\ B^T \end{pmatrix} = r(A) = 2$, 又由

$$\begin{pmatrix} A \\ B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a-1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}, \text{ 故 } a=1, b=2$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 故二次型矩阵为 } C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 由}$$

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 6,$$

$$\text{当 } \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ 时, } Cx = 0, \text{ 得基础解系为 } \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_3 = 6 \text{ 时, } (6E - C)x = 0, \text{ 得基础解系为 } \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

可知 η_1, η_2, η_3 为正交向量组, 将其单位化如下

$$\gamma_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{\eta_3}{\|\eta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{故正交矩阵为 } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

此时二次型经正交变换 $x = Qy$ 可化为标准形为 $f = 6y_3^2$