

河南省 2024 年普通高等学校
专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	50	30	50	14	6	150

注意事项：

答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上，答在试卷上无效。

一、选择题

1. 函数 $f(x) = x \sin x e^{\cos x}$ ，其中 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，那么函数 $f(x)$ 是

- A. 有界函数 B. 周期函数 C. 偶函数 D. 奇函数

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{4}{x+1}} =$

- A. 0 B. 1 C. e^4 D. e^{-4}

3. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在，则下列极限一定存在的是

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ B. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$

4. 若 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 1 \\ \frac{\sin 2(1-x)}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ ，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

5. 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + x$ ，在 $x=1$ 处

- A. 不可导，连续 B. 不可导，不连续 C. 可导，不连续 D. 可导，连续

6. 下列极限中，极限值为 0 的是

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 - x^2 - 3}$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$

7. 设函数 $f(x) = xe^{-x} + \sin x$ ，则 $f''(x) =$

A. $(x+2)e^{-x} + \sin x$ B. $(x+2)e^{-x} - \sin x$

C. $(x-2)e^{-x} + \sin x$ D. $(x-2)e^{-x} - \sin x$

8. 曲线 $y = (x+1)^2 + xe^x$, 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$

A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

10. 下列函数中拐点为 $(0,0)$ 的是

A. $y = x^5$ B. $y = x^4$ C. $y = x^{\frac{3}{2}}$ D. $y = x^{\frac{2}{3}}$

11. 方程 $x^3 + 2x - 3 = 0$ 的实数根个数为

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是

A. $\frac{1}{2}\sin 2x$ B. $\frac{1}{2}\cos 2x$ C. $1 - \sin^2 x$ D. $1 - \cos^2 x$

13. 已知函数 $f(x) = \tan x$, 则 $\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx =$

A. $\tan \sqrt{x} + C$ B. $2 \tan \sqrt{x} + C$ C. $\frac{1}{2} \tan \sqrt{x} + C$ D. $\frac{1}{4} \tan \sqrt{x} + C$

14. 定积分 $\int_{-2}^2 (x - \sqrt{4-x^2}) dx =$

A. -2π B. 2π C. -4π D. 4π

15. 直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3}$ 与平面 $2x - y + 3z + 1 = 0$ 的位置关系为

A. 平行 B. 相交但不垂直 C. 垂直 D. 直线在平面内

16. 下列等式中正确的是

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 0$ B. $\int_{-1}^1 e^x dx = 0$
C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0$ D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$

17. 下列不等式成立的是

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
 C. $\int_0^1 \ln(x+1) dx > \int_0^1 x dx$ D. $\int_0^1 (x+1) dx > \int_0^1 e^x dx$

18. 下列方程中是一阶非齐次线性微分方程的是

- A. $y' + 4y = xy^2$ B. $(y')^2 - 4y = \cos x$
 C. $y' - x^2 y = \sin x$ D. $(2x + y)dx + (x + y)dy = 0$

19. 若 $y_1 = x^2 - 2x$ 、 $y_2 = x^2 - 2x + 1$ 、 $y_3 = e^{-2x} + x^2 - 2x$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解, 则该微分方程的通解为

- A. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + x^2 - 2x$ B. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + x^2 - 2x$
 C. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + e^{-2x} - 1$ D. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + x^2 - 1$

20. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{1+x^2 y} - 1}{x^2} =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

21. 设 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 3$, 则点 $(1, -1)$

- A. 是极大值点 B. 是极小值点
 C. 不是驻点 D. 是驻点但非极值点

22. 函数 $f(x, y, z) = x^3 - y^2 - z^3$, 在点 $(1, -1, 1)$ 处的梯度

- A. $3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ B. $3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$
 C. $3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ D. $3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

23. 设 L 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 2$, 则 $\int_L (x^2 - 2x + y^2) ds =$

- A. $4\sqrt{2}\pi$ B. 4π C. $2\sqrt{2}\pi$ D. 2π

24. 下列级数中发散的是

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$
 C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3 + 1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

25. 下列结论中正确的是

- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ 一定发散
- B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ 一定收敛
- C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 一定收敛
- D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ 一定收敛

二、填空题

26. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \geq 0 \\ 5 + 2x^3, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f[f(-1)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
27. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2024) \tan \frac{1}{x - 2024} = \underline{\hspace{2cm}}$.
28. 函数 $f(x) = |3 - 2x|$ 在 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 处取得极小值.
29. 已知 $f'(0) = -2$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{\ln(1 + 3x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.
30. 函数 $f(x) = \frac{3 + 4x - x^2}{1 - 3x + x^2} e^{-x^2}$ 的水平渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
31. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^2 y - e^y + 3 = y$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.
32. 不定积分 $\int \frac{1}{e^{3x} + e^{-3x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
33. 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续且满足 $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + x^2 \int_{-1}^1 f(t) dt$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
34. 广义积分 $\int_1^e \frac{4}{x \sqrt{\ln x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
35. 微分方程 $y''' = \sin 2x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
36. 曲面 $z = 2x^2 + 3y^2$ 在点 $(1, 1, 5)$ 处的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
37. 设 $z = xy e^{x^2 + y^2}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

38. 交换积分次序 $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^1 f(x, y) dy =$ _____.

39. 两个平行平面 $2x - 4y + 4z - 5 = 0$ 和 $x - 2y + 2z = 0$ 之间的距离为_____.

40. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} x^{2n}$ 的收敛半径为_____.

三、计算题

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1 + \sin t) dt}{\sqrt{1+x^2} - 1}$.

42. 已知函数 $(e^{2\sqrt{x}} - 1) \cdot \arctan x$ 与 ax^b 是 $x \rightarrow 0^+$ 时的等价无穷小, 求 a 和 b 的值.

43. 已知函数 $y = e^{\sin 2x} + \arcsin \sqrt{x}$, 求 y' .

44. 求微分方程 $y'' - 10y' + 26y = 0$ 的通解.

45. 求不定积分 $\int (x + 2024) \ln x dx$.

46. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+1}}, & x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x}, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

47. 求直线 $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y + z - 9 = 0 \end{cases}$ 与平面 $x - 2y + z + 3 = 0$ 的夹角.

48. 已知函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $x^2 + e^{-y} + z = xyz$ 所确定, 求 dz .

49. 求二重积分 $I = \iint_D (x + y) d\sigma$, 其中 D 是由 $y = x$, $y = 2 - x$, y 轴围成的闭区域.

50. 将函数 $f(x) = \frac{3x+3}{2x^2+5x+2}$ 展开成 x 的幂级数.

四、应用题

51. 曲线 $y = 2x - x^2$ 与直线 $y = x$ 围成的平面图形为 D .

(1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求平面图像 D 绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积.

52. 某产品生产 x 件的总成本为 $C(x) = \frac{2}{3}x^3 - 22x^2 + 8x + 3500$, 每一件产品价格是

$30 - \frac{x}{2}$ ，求产品产量为多少件时才能获得最大利润？

五、证明题

53. 证明不等式： $\ln(1 + e^x) - x > \frac{1}{e^x + 1}$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ 。