

河南省 2025 年普通高等学校
专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	50	30	50	14	6	150

注意事项：

答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上，答在试卷上无效。

一、选择题（每小题 2 分，共 50 分）

1. 下列函数为奇函数的是（ ）

A. $f(x) = x^3 \sin x$ B. $f(x) = \cos(\sin x)$ C. $f(x) = (5^x + 5^{-x})^3$ D. $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x} =$ （ ）

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 0 D. ∞

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) - 1$ 是比 $\sin x$ 高阶的无穷小，且 $f(0) = 1$ ，则下列选项正确的是（ ）

A. $f'(0) = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ C. $f'(0) = 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin f(x) = 0$

4. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处是（ ）

A. 连续点 B. 跳跃间断点 C. 第二类间断点 D. 可去间断点

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2-x} =$ （ ）

A. e^4 B. e^{-4} C. e^{-1} D. e^2

6. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| = 0$ ，则下列正确的是（ ）

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 0$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \sin x} = 0$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x(1 - \cos x)} = 0$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

7. 函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $y = f(e^x)$, 则 $y'' = ()$

A. $f''(e^x)$

B. $f''(e^x)e^{2x}$

C. $e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$

D. $e^x f'(e^x) + e^x f''(e^x)$

8. 函数 $y = (x^2 - x + 2)|x - 3|$ 的不可导点的个数 $()$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

9. 函数 $y = \cos 2x$, 则 $y^{(2025)} = ()$

A. $2^{2025} \sin 2x$

B. $2^{2025} \cos 2x$

C. $-2^{2025} \cos 2x$

D. $-2^{2025} \sin 2x$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上满足 $f''(x) < 0$, 则 $f'(0), f'(2), f(2) - f(1)$ 的大小顺序 $()$

A. $f'(0) > f'(2) > f(2) - f(1)$

B. $f'(0) > f(2) - f(1) > f'(2)$

C. $f'(2) > f'(0) > f(2) - f(1)$

D. $f'(2) > f(2) - f(1) > f'(0)$

11. 函数 $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值, 则必有 $()$

A. $f'(x_0) = 0$

B. $f''(x_0) = 0$

C. $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$

D. $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

12. 已知 $f(x) = -2x$, 则 $\int \frac{f(\tan x)}{\sin^2 x - 1} dx = ()$

A. $\tan^2 x + C$

B. $-\tan^2 x + C$

C. $\cot^2 x + C$

D. $-\cot^2 x + C$

13. 设 $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln \sin x dx$, $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln x dx$, $K = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ln \tan x dx$, 则 I, J, K 的大小关系 $()$

A. $I < J < K$

B. $I < K < J$

C. $K < J < I$

D. $J < K < I$

14. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则在 (a, b) 内可能 $()$

A. 可能存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$

B. 有唯一的点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$

C. 至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$

D. 至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

15. $\int_{-1}^1 \left(xe^x + \frac{\sin^3 x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = ()$

A. $-\frac{2}{e}$ B. $\frac{2}{e}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

16. 已知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{4}{1+kx^2} dx (k > 0)$ 收敛于 2, 则 $k = ()$

A. π B. 2π C. $4\pi^2$ D. π^2

17. 空间直线方程为 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$, 则直线必 $()$

A. 过原点且垂直于 x 轴 B. 过原点且垂直于 y 轴
C. 过点 $(1,2,0)$ 且垂直于 z 轴 D. 过点 $(1,2,1)$ 且垂直于 z 轴

18. 关于微分方程的下列结论正确的是 $()$

①该方程是齐次微分方程 ②该方程是线性微分方程
③该方程是常系数微分方程 ④该方程是二阶微分方程
A. ①② B. ②④ C. ①③④ D. ②③④

19. 用待定系数法求微分方程 $y'' - 3y' - 4y = xe^{-x}$ 的特解时, 其特解 y^* 可设为 $()$

A. $ax+b$ B. $(ax+b)e^{-x}$ C. $x(ax+b)e^{-x}$ D. $x^2(ax+b)e^{-x}$

20. 函数 $f(x, y, z) = xy + yz^2 - x$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处沿 x 轴正方向的方向导数为 $()$

A. -2 B. -7 C. 2 D. 7

21. 空间曲线 $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases}$ 在点 $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ 的法平面方程为 $()$

A. $4x - z + \frac{\pi}{2} = 0$ B. $4y - z + \frac{\pi}{2} = 0$ C. $4x - z - \frac{\pi}{2} = 0$ D. $4y - z - \frac{\pi}{2} = 0$

22. 已知函数 $x = x(y, z)$ 由 $2xz - 2xy + \ln y = 0$ 确定, 则 $\frac{\partial x}{\partial z} = ()$

A. $\frac{x}{z-y}$ B. $\frac{y}{x-z}$ C. $\frac{y}{z-x}$ D. $\frac{x}{y-z}$

23. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^0 f(x, y) dx = ()$

A. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy$ B. $\int_{-1}^0 dx \int_{1-x^2}^0 f(x, y) dy$
C. $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^0 f(x, y) dy$ D. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x}}^0 f(x, y) dy$

24. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n-1}$ 的收敛域为 ()

- A. $(1,3)$ B. $[1,3)$ C. $(1,3]$ D. $[1,3]$

25. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且其和为 S , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1} + 2u_{n+2})$ 收敛于 ()

- A. $S + u_1$ B. $2S - 2u_2$ C. $2S - u_1 - 2u_2$ D. $S + u_1 - u_2$

二、填空题 (每小题 2 分, 共 30 分)

26. 若 $f(x) = \ln x$, $f[g(x)] = 2x$, 则 $g(x) =$ _____

27. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + (-1)^n}{n^2} =$ _____

28. 曲线 $y = e^{-2x} \cos 3x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 _____

29. $\int x \ln(1+x^2) dx =$ _____

30. 函数 $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$ 的拐点坐标为 _____

31. 设 $\int f(x) dx = x^2 + \ln(2x) + C$, 则 $f(x) =$ _____

32. 曲线 $y = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2}$ 的渐近线有 _____ 条

33. 广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx =$ _____

34. 求微分方程 $dy - (y + e^x) dx = 0$ 的通解 _____

35. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D x dx dy =$ _____

36. $f(x, y) = x^2 + \tan \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 则 $\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(1,0)} =$ _____

37. 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+1) \arctan \frac{1}{x^2 + 4y^2} =$ _____

38. 已知椭圆 $L: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, 逆时针方向, 则 $\oint_L (y + e^x) dx + (2x + \cos y + 2y) dy =$ _____

39. $\vec{a} = \{1, -3, -2\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 0\}$, 求 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$ _____

40. 将函数 $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$ 展开为 x 的幂级数 _____

三、计算题（每小题 5 分，共 50 分）

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{\sin 2x}{x}}{(e^x - 1) \arcsin x}$.

42. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $(\tan x)^b$ 与 $(1 - \cos 2x)^{\frac{1}{b}}$ 都是比 x 的高阶无穷小, 求 b 的取值范围.

43. 对于函数 $y = \begin{cases} x = (t+1)^3 + 1 \\ y = \arcsin \sqrt{t} \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{1}{2}}$.

44. 微分方程 $y'' - 3y' - 4y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -5$ 的特解.

45. 求不定积分 $\int \frac{e^x}{1 + \sqrt{2e^x + 1}} dx$.

46. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, -2 < x < 2 \\ x, x \geq 2 \end{cases}$, 求 $\int_{-2}^2 f(x+2) dx$.

47. 直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-1}$ 与平面方程 $\pi: 2x + 2y - z - 1 = 0$ 相交

(1) 求直线 L 与平面 π 的夹角;

(2) 求通过直线 L 与平面 π 的交点且与直线 L 垂直的平面方程.

48. 设二元函数 $z = (x-y)\sin(xy)$, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$.

49. 计算二重积分 $I = \iint_D x^2 e^{-\frac{y}{x}} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = 2x, y = 0, x = 1$ 及 $x = 2$ 所围成的闭区域.

50. 求幂级数 $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n} + \cdots$ 在其收敛区间 $(-1, 1)$ 上的和函数.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

51. 设曲线 $y = e^{2x}$ 、 $y = e^{-x}$ 及 $x = 2$ 所围成的区域为 D , 求其区域 D 的面积及绕 x 轴旋转一周而形成的体积.

52. 将长为 $4m$ 的铁丝剪成两段, 一段围成正方形, 余下的围成圆周, 如何选择边长与半径, 可使两个图形的面积之和为最小.

五、证明题（6 分）

53. $f(x)$ 是定义在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的连续奇函数, 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 内可导, 证明: 至少存在一点

$$\xi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \text{ 使得 } f'(\xi) \sin(2\xi) = -2f(\xi).$$