

河南省 2023 年普通高等学校
专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	50	30	50	14	6	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上.

本卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在试卷上无效.

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{7}{\sqrt{49-x^2}} + \lg(3x-6)$ 的定义域是

- A. $(-7, 2)$ B. $(2, 7)$ C. $(-7, 7)$ D. $(2, +\infty)$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{10x^2+4x}}{\arctan 10x} =$

- A. $-\frac{5}{2}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{5}{2}$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 6 + e^{-\frac{2}{x}}, & x \neq 0 \\ 6, & x = 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

4. 当 $x \rightarrow 2$ 时, 与 $x-2$ 是等价无穷小的是

- A. $\frac{1}{4}(x^2-4)$ B. $2x-4$ C. $(x-2)^2$ D. $\frac{1}{2}(x^3-8)$

5. 下列极限存在的是

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x+3)$

- C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-2)(2x+1)}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{5}{x^5}$

6. 已知 $f'(-3) = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{\sin(3+x)} =$

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 不存在

7. 设函数 $y = f(x)$ 可导, 且满足 $f'(x^3 + 2) = \frac{1}{x^3 + 6}$, 则 $dy =$

- A. $\frac{1}{x^3 - 4} dx$ B. $\frac{1}{x^3 + 6} dx$ C. $\frac{1}{x + 4} dx$ D. $\frac{1}{x - 4} dx$

8. 曲线 $y = 3x^2(x-1)^{-\frac{2}{3}} + 3$ 的垂直渐近线为

- A. $x = 1$ B. $x = -1$ C. $y = 3$ D. 无垂直渐近线

9. 若函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 下列结论正确的是

- A. 函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续
B. 函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可微
C. 必有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 成立
D. 必有一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立

10. 曲线 $y = \frac{x}{2 \ln x} + 1$ 在点 $\left(e^2, \frac{e^2}{4} + 1\right)$ 处的切线斜率为

- A. -8 B. $-\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ D. 8

11. 设 $y = e^{ax} + x^3 (a > 0)$, 则 $y'''(0) =$

- A. 6 B. $a^3 + 6$ C. $a + 6$ D. $a^2 + 6$

12. 函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{2+u} du$ 在区间 $(-2, 2)$ 上

- A. 先增后减 B. 单调减少 C. 单调增加 D. 先减后增

13. 已知 $f(x) = e^x$, 则 $\int \left(\frac{f(\ln x)}{x^2} + 1 \right) dx =$

- A. $\ln|x| + x + C$ B. $-\ln|x| + x + C$ C. $\frac{1}{x} + x + C$ D. $-\frac{1}{x} + x + C$

14. 下列等式中错误的是

- A. $\int_{-1}^1 (x + \arctan x) dx = 0$ B. $\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx = 0$
C. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ D. $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx = \pi$

15. 下列广义积分中收敛的是

- A. $\int_0^1 \frac{dx}{x^5}$ B. $\int_5^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 5}$ C. $\int_0^1 \frac{dx}{3-2x-x^2}$ D. $\int_0^3 \frac{dx}{(1-x)^5}$

16. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{3}$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{2}$, 则以向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{6}$ D. $6\sqrt{2}$

17. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 6 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y}{\sqrt{x^3 y + 9} - 3} =$

- A. $-\frac{1}{12}$ B. 0 C. $\frac{1}{12}$ D. 不存在

18. 函数 $z = 2x^2 + 3xy - 4x - 15$ 在条件 $2x - y = 4$ 下的最小值为

- A. -23 B. -17 C. -15 D. -11

19. 函数 $f(x, y) = 1 + ye^{2x}$ 在点 $(0, 1)$ 处沿方向 $\vec{l} = (6, -8)$ 的方向导数为

- A. $-\frac{2}{5}$ B. -2 C. $\frac{2}{5}$ D. 2

20. 平面 $\pi_1: x + 4y + 2z - 5 = 0$ 与平面 $\pi_2: 2x - 5y + 9z + 4 = 0$ 的位置关系是

- A. $\pi_1 \perp \pi_2$ B. π_1 与 π_2 重合 C. $\pi_1 // \pi_2$ 但不重合 D. π_1 与 π_2 相交但不垂直

21. 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 8\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2 + 2x + 3) dx dy =$

- A. 11π B. 40π C. 56π D. 88π

22. 微分方程 $y''' - 2x^3 y' + x^2 y = x \sin x$ 是

- A. 三阶线性微分方程 B. 三阶非线性微分方程
C. 四阶线性微分方程 D. 四阶非线性微分方程

23. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y \cos y^2}$ 的通解为

- A. $\sin y^2 + 3x^2 + C = 0$ B. $\sin y^2 - 3x^2 + C = 0$
C. $\sin y^2 + 3x^2 = 0$ D. $\sin y^2 - 3x^2 = 0$

24. 下列级数中绝对收敛的是

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n - 3^n}{5^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{5n+4}}$
C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^3+1} + \sin n}{n+1}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+3)\sqrt{3n+2}}$

25. 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 下列结论中正确的是

- A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ 收敛 B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+5}$ 收敛
- C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

二、填空题

26. 函数 $y = 1 + 2 \tan 5x$ ($|x| < \frac{\pi}{10}$) 的反函数是_____.

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - 2x}{\sin 3x} =$ _____.

28. 设 $f(x) = (7x-6)^{\frac{8}{7}} + 9x$, 则 $f''(1) =$ _____.

29. 设参数方程 $\begin{cases} y = \sqrt{3}t^3 + t \\ x = t^2 - 5 \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

30. 曲线 $y = \frac{x^2}{2} + 4 \ln x + \ln 7$ 的拐点为_____.

31. 不定积分 $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x} \right) dx =$ _____.

32. 定积分 $\int_0^1 \frac{2}{e^{-x} + 5} dx =$ _____.

33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{\sin 2t} dt}{\tan(3x + 7 \sin x)} =$ _____.

34. 曲面 $z = x^3 + y^2 - 3xy + 4y - 3$ 在点 $(1, -2, 0)$ 处的法线方程为_____.

35. 点 $(-3, \sqrt{5}, 2)$ 到平面 $4x + \sqrt{5}y - 2z - 4 = 0$ 的距离是_____.

36. 设函数 $z = 2 \sin x^2 + e^{2y} - 3xy^2$, 则 $dz =$ _____.

37. 交换 $\int_5^7 dy \int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x, y) dx$ 的积分次序为_____.

38. 设曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t, \\ y = \sqrt{3} \sin 2t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$, 则曲线积分 $\int_L \left(\frac{x^2 + y^2}{3} \right)^4 ds =$ _____.

39. 微分方程 $y'' + 5y' - 24y = 0$ 的通解为_____.

40. 当 $-5 < x < 5$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^n}$ 的和函数为_____.

三、计算题

41. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1, & x < 1 \\ b, & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{\sin(\sqrt{x} - 1)}, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 求 a 和 b 的值.

42. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos 2x)^{2023x}}{2x^3}$.

43. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\cos y = e^{2x+y} + x^3 - y^2 + 3\pi$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

44. 求曲线 $y = \frac{e^x}{1+x} + 3x - 5$ 的凹凸区间.

45. 求不定积分 $\int x[\sec^2 x + \sin(2 + x^2)]dx$.

46. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^{-\frac{x^3}{3}}, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-3}^1 x^2 f(x)dx$.

47. 求过点 $P(5, -1, 2)$ 且与两平面 $2x + 3y - 7z = -14$ 和 $x + 2y - 3z = 20$ 平行的直线方程.

48. 设 $z = u^2 + \cos(xy + u)$, 而 $u = x \ln y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

49. 计算二重积分 $I = \iint_D \left(\frac{x^3}{y^2} + 2x \right) dx dy$, 其中 D 是由 $x = \sqrt{2y}$, $x = 0$ 及 $y = 2$ 所围成的闭区域.

50. 将函数 $f(x) = \frac{5}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

四、证明题

51. 证明: 对于任意的 x , $\ln(x^2 + m) + \frac{m}{x^2 + m} \geq 1 + \ln m$, 其中 $m > 0$ 为常数.

五、应用题

52. 设平面区域 D 是由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x = k$ ($k > 0$) 及 x 轴围成, 区域 D 的面积为 S , 该区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V , 当 k 为何值时 $V = \frac{3}{2}\pi S$ 成立?

53. 某新能源汽车在直道上以 $15m/s$ 的速度匀速行驶, 看到路障需要立刻减速停车. 已知变速直线运动的速度函数 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数, 加速度函数 $a(t)$ 又是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的导数. 假设该汽车刹车后匀减速行驶了 $45m$ 停止, 求在匀减速过程中汽车的位置函数 $s(t)$ 的表达式.

