

2024 考研数学（三） 真题

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 在 $x \rightarrow 0^+$ 时，下列无穷小量中与 x 等价的是

- A. $e^{-\sin x} - 1$. B. $\sqrt{x+1} - \cos x$. C. $1 - \cos \sqrt{2x}$. D. $1 - \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1. 【答案】C

【解析】

$e^{-\sin x} - 1 \sim -\sin x \sim -x$ A 不对.

$\sqrt{x+1} - \cos x \sim \frac{1}{2}x$ B 不对.

$1 - \cos \sqrt{2x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2 = x$ C 对.

$1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}$
 $= \frac{x}{2} + o(x)$ D 不对.

2. 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin t dt$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$, 则

- A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点.
B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.
C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
D. $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， $(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

【答案】B

【解析】

$$f'(x) = e^{x^2} \sin x, f''(x) = 2xe^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x$$

$$f'(0) = 0, f''(0) = 1 > 0.$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

$$g'(x) = e^{x^2} \sin^2 x + \sin 2x \int_0^x e^{t^2} dt,$$

$$g''(x) = e^{x^2} \sin 2x + 2xe^{x^2} \sin^2 x + \sin 2xe^{x^2} + 2 \cos 2x \int_0^x e^{t^2} dt$$

$$g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \quad g'''(0) > 0.$$

$(0,0)$ 是 $y = g(x)$ 的拐点.

3. 已知 k 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right]$

- A. 绝对收敛. B. 条件收敛. C. 发散. D. 敛散性与 k 的取值有关.

3. 【答案】B

【解析】

当 $k = 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 条件收敛

当 $k \neq 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$

为条件收敛 + 绝对收敛

故原级数条件收敛

4. 设函数 $f(x)$ 连续, $\int_0^1 dy \int_0^y f(x) dx =$

- A. $\int_0^1 xf(x) dx$. B. $\int_0^1 (x+1)f(x) dx$.
C. $\int_0^1 (x-1)f(x) dx$. D. $\int_0^1 (1-x)f(x) dx$.

4. 【答案】D

【解析】

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_0^y f(x) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^y f(x) dx dy = y \int_0^y f(x) dx \Big|_0^1 - \int_0^1 y \cdot f(x) dy \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 y f(y) dy \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 (1-x)f(x) dx \end{aligned}$$

5. A 是 $m \times n$ 矩阵, β 是 m 维非零列向量, 若 A 有 k 阶非零子式, 则

- A. 当 $k = m$ 时, $Ax = \beta$ 有解. B. 当 $k = m$ 时, $Ax = \beta$ 无解.
C. 当 $k < m$ 时, $Ax = \beta$ 有解. D. 当 $k < m$ 时, $Ax = \beta$ 无解.

5. 【答案】A

【解析】

$$r(A) \geq k$$

若 $k = m$ ，则 $r(A) = m$ $r(A, B) = m$

故 $r(A) = r(A, \beta) = m$ ，则 $Ax = \beta$ 有解

6. 设 A 为 3 阶矩阵，则 “ $A^3 - A^2$ ” 可对角化是 “ A 可对角化” 的 ()

- A. 充分但不必要条件
- B. 必要但不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

6. 【答案】B

【解析】

$$\text{令 } f(A) = A^3 - A^2,$$

若 A 可对角化，则 A 中有 n 个线性无关的特征向量，故 $f(A)$ 有 n 个线性无关的特征向量，故 $f(A)$ 可

对角化；若 $f(A)$ 可对角化，取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $f(A)$ 可对角化， A 不可对角化。综上为必要不充分条件，

选 B。

7. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -a \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ ，若 $f(x, y) = |xA + yB|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 2 - \sqrt{3})$
- B. $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$
- C. $(2 + \sqrt{3}, 4)$
- D. $(0, 4)$

7. 【答案】B

【解析】

$$f(x, y) = -a(x^2 - y^2) - (2xy - 4x^2) = (4 - a)x^2 + ay^2 - 2xy = (x, y) \begin{pmatrix} 4 - a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-a > 0 \\ \begin{vmatrix} 4-a & -1 \\ -1 & a \end{vmatrix} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 4 \\ 2-\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{3} \end{cases}, \text{ 得 } a \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}). \text{ 选 } B$$

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(-1, 1)$, Y 服从正态分布 $N(1, 2)$, 若 X 与 $X+2Y$ 不相关, 则 X 与 $X-Y$ 的相关系数为 ()

- A. $\frac{1}{3}$
 B. $\frac{1}{2}$
 C. $\frac{2}{3}$
 D. $\frac{3}{4}$

8. 【答案】D

【解析】

$$\text{Cov}(X, X+2Y) = \text{Cov}(X, X) + 2\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$= DX + 2\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2}DX = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Cov}(X, X-Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) = DX - \text{Cov}(X, Y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) = 1 + 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$DX = 1 \quad \therefore \rho_{X, X-Y} = \frac{\frac{3}{2}}{2 \times 1} = \frac{3}{4}.$$

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 是来自总体 $B(1, 0.1)$ 的简单随机样本. 令 $T = \sum_{i=1}^{20} X_i$, 利用泊松分布近似表示二项分布

的方法可得 $P\{T \leq 1\} \approx$

- A. $\frac{1}{e^2}$.
 B. $\frac{2}{e^2}$.
 C. $\frac{3}{e^2}$.
 D. $\frac{4}{e^2}$.

9. 【答案】C

【解析】

由题意。可知 $T \sim B(20, 0.1), np = 20 \times 0.1 = 2$

$$\begin{aligned} p\{T \leq 1\} &= p\{T=0\} + p\{T=1\} \\ &= \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} = e^{-2} + 2e^{-2} = \frac{3}{e^2} \end{aligned}$$

10. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 样本的经验分布函数为

$F_n(x)$, 对于给定的 X ($0 < F(x) < 1$), $D(F_n(x)) = ()$

A. $F(x)(1-F(x))$

B. $(F(x))^2$

C. $\frac{1}{n} F(x)(1-F(x))$

D. $\frac{1}{n} (F(x))^2$

10. 【答案】C

【解析】

$F_n(x)$ 为样本中 $\{x_i \leq x\}$ 发的概率。

$$I_i(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \\ 0 & x_i > x \end{cases} \cdot Z_i(x) \sim B[1, F(x)]$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i(x) \quad D[F_n(x)] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i(x)\right] = \frac{1}{n^2} n DZ_i(x) \cdot \frac{1}{n} F(x)[1-F(x)]$$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 设 $g(x)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{3+x}{3-x}$ 的反函数, 则曲线 $y = g(x)$ 的渐近线方程为_____.

【答案】 $y = \pm 3$

【解析】

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{3+x}{3-x} \Rightarrow 2y = \ln \frac{3+x}{3-x} \\ \text{令 } \Rightarrow e^{2y} &= \frac{3+x}{3-x} = \frac{6}{3-x} - 1 \\ \Rightarrow x &= 3 - \frac{6}{e^{2y} + 1} \end{aligned}$$

$$g(x) = 3 - \frac{6}{e^{2y} + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3.$$

故 $y = g(x)$ 渐进线方程为 $y = \pm 3$

12. 设 $\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln 2$, 则 $a =$ _____.

【答案】 2

【解析】 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a} \right) dx = \ln \frac{x}{2x+a} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$, 解得 $a = 2$.

13. 微分方程 $xy' - y + x^2 e^x = 0$ 满足条件 $y(1) = -e$ 的解为 $y =$ _____.

【答案】 $y = -xe^x$

【解析】

$$\begin{aligned} xy' - y + x^2 e^x &= 0 \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = -xe^x \\ \Rightarrow y &= e^{\frac{1}{x} dx} \left[\int e^{-\frac{1}{x}} (-xe^x) dx + C \right] \\ &= -x(e^x + C) \end{aligned}$$

代入 $y(1) = -e$, 得 $C = 0$

故解 $y = -xe^x$

14. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由 $z + \ln z - \int_y^x x e^{-x^2} dt = 1$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{8} e^{-2}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{\int_y^x e^{-t^2} dt + x e^{-x^2}}{1 + \frac{1}{z}} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{e^{-1}}{2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{\left[2e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) \right] \left(1 + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z^2} \left(\int_y^x e^{-t^2} dt + x e^{-x^2} \right) \frac{\partial z}{\partial x}}{\left(1 + \frac{1}{z} \right)^2} \Big|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{e^{-1} \cdot \frac{e^{-1}}{2}}{4} = \frac{e^{-2}}{8}.$$

$$15. \text{ 已知 } f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}, g(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}, \text{ 则方程 } f(x) = g(x) \text{ 的不}$$

同的根的个数为_____.

【答案】 2

$$\text{【解析】 } f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 2x+1 & 1 \\ 2x & 4x & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, g(x) = x(-8x-2) = 0, \text{ 可得两个根 } x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 0.$$

16. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, A 与 C 互不相容, 已知 $P(A) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, 则在事件 A, B, C 至少有一个发生的事件下, A, B, C 中恰有一个发生的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC)$$

$$= p(A) + p(B) + p(c) - p(A)p(B) - p(D)p(c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$P(ABC) + P(AB\bar{C}) + P(\tilde{A}BC) = P(AB) + p(BC)$$

$$= P(A)P(B) + P(B)P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

$$17. \text{ (本题满分 10 分) 计算 } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx.$$

17. 解:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}}{x^2 - 2x + 2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} \ln |1+x| \Big|_0^1 - \frac{1}{10} \ln |x^2 - 2x + 2| \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \arctan(x-1) \Big|_0^1 = \frac{3}{0} \ln 2 + \frac{1}{10} \pi.$$

18. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - e^{2\sin x} + 1}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} = -3$.

证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

18 解:

$$\text{已知 } \ln(1+x) + \ln(1-x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$$

$$e^{2\sin x} = 1 + 2\sin x + \frac{1}{2}(2\sin x)^2 + o(x^2) = 1 + 2\sin x + 2\sin^2 x + o(x^2)$$

$$\text{因此, } -3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - e^{2\sin x} + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - (1 + 2\sin x + 2\sin^2 x + o(x^2)) + 1}{-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2\sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{-x^2}$$

$$\text{可以得出 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2\sin x}{x^2} = -5, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{x^2} = -5,$$

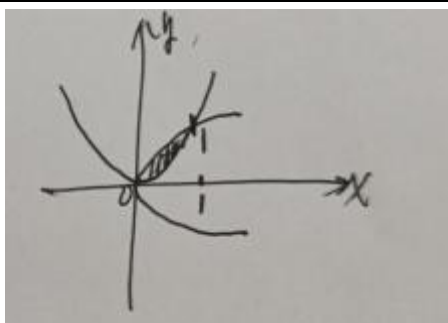
$$\text{进一步可以得出 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2x}{x^2} = -5, \text{ 以及 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - 2] = 0, \text{ 可得 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0), \text{ 故 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -5.$$

19. (本题满分 12 分) 已知平面有界区域 $D = \{(x, y) | y^2 \leq x, x^2 \leq y\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x-y+1)^2 dx dy$.

解:

$$\iint_D (x-y+1)^2 dx dy = \iint_D ((x-y)^2 + 2(x-y) + 1) dx dy$$



由轮换对称性

$$\iint_D (x-y) dx dy = \iint_D (y-x) dx dy = 0.$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y)^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x-y)^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3} (y-x)^3 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[(\sqrt{x}-x)^3 - (x^2-x)^3 \right] dx = \frac{1}{3} \times \frac{1}{70} = \frac{1}{210} \end{aligned}$$

$$\int_D 1 dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{则原积分} = \frac{1}{210} + \frac{1}{3} = \frac{71}{210}$$

20. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导. 证明导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加的充分必要条件是: 对 (a, b) 内

任意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

解: 充分性: 若对 (a, b) 内任意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

则在 (a, b) 内取任意的 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} < \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$$

在 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 两边同时令 $x_2 \rightarrow x_1^+$, 得

$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$, 两边同时令 $x_2 \rightarrow x_3^-$, 得 $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_3)$, 即

$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_3)$, 同理可得 $f'_+(x_3) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_5)$. 因为

$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_5) - f(x_3)}{x_5 - x_3}$, 所以 $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_5)$. 由 x_1, x_5 的任意性, 可得 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格

单调递增, 充分性得证。

再证必要性, 即已知 $f'(x)$ 单调递增, 在 $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理, 知存在

$\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

又由 $f'(x)$ 单调递增, 且 $\xi_1 < \xi_2$ 知, $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \text{ 必要性得证.}$$

综上所述, 充要条件得证。

21. (本题满分 12 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 A 的列向量组的一个极大线性无关组 α, β , 并求矩阵 H , 使得 $A = GH$, 其中 $G = (\alpha, \beta)$.

21. 解:

(1) 因为 $r(A) = 2, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -a & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & -2a+2 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $a=1$ 时.

(2) 由 (1) 可知, $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$,

则 α_1, α_2 为 A 的列向量组的一个极大线性无关组, $\alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_2$ 且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$,

$\alpha_5 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 由 $A = GH$, 解得 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

22. (本题满分 12 分) 投保人的损失事件发生时, 保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq 100, \\ x-100, & X > 100. \end{cases} \quad \text{设损失事件发生时, 投保人的损失额 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) 求 $P\{Y > 0\}$ 及 EY .

(2) 这种损失事件在一年内发生的次数记为 N , 保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M , 假设 N 服从参数为 8 的泊松分布, 在 $N = n (n \geq 1)$ 的条件下, M 服从二项分布 $B(n, p)$, 其中

$p = P\{Y > 0\}$, 求 M 的概率分布.

解:

$$(1) P\{Y > 0\} = P\{X - 100 > 0\} = P\{X > 100\} = \int_{100}^{+\infty} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx = \frac{1}{4}$$

$$EY = \int_{100}^{+\infty} (x-100) \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx = 50$$

(2)

$$N \sim P(8) = \{M \mid N = n\} \sim B\left(n, \frac{1}{4}\right)$$

$$P\{M = m\} = \sum_{n=m}^{\infty} P\{N = n\} \cdot P\{M = m \mid N = n\}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^n}{n!} e^{-8} \cdot C_n^m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^n}{n!} e^{-8} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8} \frac{8^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^{n-m}}{(n-m)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8} \frac{8^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{6^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{2^m}{m!} e^{-2}$$