

2025 考研数学（二） 真题

试卷及解析

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由 $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$

A. $\frac{z}{z+1}(e^{-x^2} - e^{-y^2})$.

B. $\frac{z}{z+1}(e^{-x^2} + e^{-y^2})$.

C. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2} - e^{-y^2})$.

D. $-\frac{z}{z+1}(e^{-x^2} + e^{-y^2})$.

1. 【答案】A

【解析】 $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$ ，分别对 x, y 求偏导，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} - e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{z+1} e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} + e^{-y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{z+1} e^{-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{z+1} (e^{-x^2} - e^{-y^2})$$

2. 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin t dt$ ， $g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$ ，则

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点.

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, $(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点.

【答案】B

【解析】

$$f'(x) = e^{x^2} \sin x, f''(x) = 2xe^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x$$

$$f'(0) = 0, f''(0) = 1 > 0.$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点.

$$g'(x) = e^{x^2} \sin^2 x + \sin 2x \int_0^x e^{t^2} dt,$$

$$g''(x) = e^{x^2} \sin 2x + 2xe^{x^2} \sin^2 x + \sin 2xe^{x^2} + 2 \cos 2x \int_0^x e^{t^2} dt$$

$$g'(0) = 0, g''(0) = 0, g'''(0) > 0.$$

$(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点.

3. 如果对微分方程 $y'' - 2ay' + (a+2)y = 0$ 任一解 $y(x)$, 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 均收敛, 则 a 的取值范围为

A. $(-2, -1]$.

B. $(-\infty, -1]$.

C. $(-2, 0)$.

D. $(-\infty, 0)$.

3. 【答案】C

【解析】当 $a = -2$ 时, $y'' + 4y' = 0$, 通解: $c_1 + c_2 e^{-4t}$, $c \neq 0$ 时, $\int_0^{+\infty} (c_1 + c_2 e^{-4x}) dx$ 不收敛.

故 B、D 排除.

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $y'' + y' + \frac{3}{2}y = 0$, 通解: $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(a_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) + B \left(\sin\frac{\sqrt{5}}{2}t\right) \right)$

$\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛.

4. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域内有定义且恒不为 0, 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时

A. $f(x) + g(x) = O(g(x)).$

B. $f(x)g(x) = O(f^2(x)).$

C. $f(x) = O(e^{g(x)} - 1).$

D. $f(x) = O(g^2(x)).$

4. 【答案】C

【解析】由题易知, $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 高阶无穷小.

$$\text{则有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

又 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域内有定义且不恒等于 0.

故对于 A 选项, 等式两端同除 $g(x)$ 得:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + 1 = \frac{o[g(x)]}{g(x)}$$

取极限得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o[g(x)]}{g(x)}.$$

即 $0 + 1 = 0$, 显然 A 不成立.

对于 B 选项, 等式两端同除 $f^2(x)$ 得

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{d[f^2(x)]}{f^2(x)}$$

两端取极限得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o[f^2(x)]}{f^2(x)}$, 即 $\infty = 0$, 显然不成立.

对于 C 选项, 等式两端同除 $g(x)$ 得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{o[e^{g(x)} - 1]}{g(x)}$$

$$\text{取极限得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o[e^{g(x)} - 1]}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o[g(x)]}{g(x)}$$

显然有 $0 = 0$ ，故 c 正确.

对于 D 等式两端同除 $g(x)$ 得

$$\frac{f(x)}{g^2(x)} = \frac{o[g^2(x)]}{g^2(x)}.$$

$$\text{取极限得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o[g^2(x)]}{g^2(x)}, \text{ 显然不成立.}$$

综上选 C.

5. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x, y) dy =$

$$\text{A. } \int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy.$$

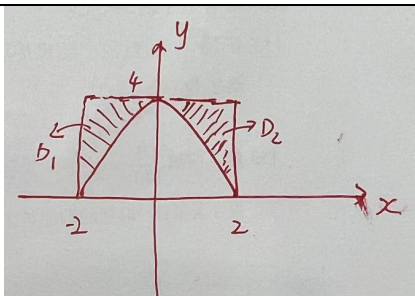
$$\text{B. } \int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy.$$

$$\text{C. } \int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_2^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx \right] dy.$$

$$\text{D. } 2 \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx.$$

【答案】A

【解析】由题易知, 此二重积分积分区域为



$D = \{(x, y) | 4 - x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 2\}$ ，对应图像为上图所示。

记 $D_1 = \{(x, y) | 4 - x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 0\}$ ， $D_2 = \{(x, y) | 4 - x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2\}$ ，且

$I = \int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x, y) dy$ ，则 $I = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$ ，交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 dy \int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \\ &= \int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

故 A 正确。

6. 设单位质点 P, Q 分别位于点 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 处， P 从点 $(0, 0)$ 出发沿 x 轴正向移动，记 G 为引力常量，则当质点 P 移动到点 $(l, 0)$ 时，克服质点 Q 的引力所做的功为（ ）

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2 + 1} dx$

B. $\int_0^l \frac{Gx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$

C. $\int_0^l \frac{G}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$

D. $\int_0^l \frac{G(x+1)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$

【答案】A

【解析】由题可知，其对应如图所示。

单位质点 P 与单位质点 Q 之间的引力为

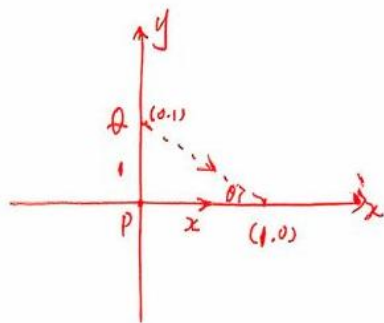
$$F = G \frac{1 \cdot 1}{r^2}$$

其中 r 为两质点间的距离.

且由图可知 $r^2 = x^2 + 1$

又引力 F 在 x 方向上的力投影为 $F_x = F \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} F$.

故克服引力做功为:



$$W = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 \frac{G}{(x^2 + 1)} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{Gx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

7. 设函数 $f(x)$ 连续, 给出下列 4 个条件:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$ 存在;

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}$ 存在;

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在;

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{x}$ 存在.

其中可得到 “ $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导” 的条件个数为

A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

7. 【答案】B

【解析】① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x} = A$.

$\Rightarrow |f(0)| - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = |f(0)| \Rightarrow f(0) = 0$. 或 $f(0)$ 为正.

若 $f(0)$ 为正, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $f(x) > 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)-f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = A \Rightarrow f'(0) = A$

若 $f(0) = 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x} = A$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &= A \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &= A \end{aligned} \Rightarrow \text{若 } A = 0, \text{ 则 } f'(0) \text{ 存在, 若 } A \neq 0, \text{ 则 } f'(0) \text{ 不存在.}$$

②由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-|f(0)|}{x} = A \Rightarrow f(0) = |f(0)|$, 则 $f(0) = 0$ 或 $f(0) > 0$

若 $f(0) = 0$, 则 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-|f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$

若 $f(0) > 0$, 则 $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ 从而②成立.

③由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在, 则 $|f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. 则同①, 从而③错.

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在, 则 $|f(x)|$ 在 $x = 0$ 处可导 $\Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, ④正确.

从而①③错误, ②④正确, 选 B.

8. 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值, 则 ()

A. $a > 4, b > 0$

B. $a < 4, b > 0$

C. $a > 4, b < 0$

D. $a < 4, b < 0$

【答案】D

【解析】

令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, 为实对称矩阵, 对应二次型为 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 + 4x_1x_2$,

则用配方法将其化为标准型, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2)^2 + (a-4)x_2^2 + bx_3^2$ 。已知 A 有一正两负特征值, 则

$$\begin{cases} a-4 < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 4 \\ b < 0 \end{cases}, \text{ 故选 D.}$$

9. 下列矩阵中, 可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

9. 【答案】B

【解析】

A 选项: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B 选项: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C 选项: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D 选项: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $r(AB) = r(BA) + 1$, 则

A. 方程组 $(A+B)x = 0$ 只有零解.

B. 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 均只有零解.

C. 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 没有公共非零解.

D. 方程组 $ABAx = 0$ 与方程组 $BABx = 0$ 有公共非零解.

【答案】D

【解析】

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $r(AB) = 1$.

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r(BA) = 0$. 排除 B, C.

$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $r(A+B) = 1$ 排除 A, 故选 D.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 设 $\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln 2$, 则 $a =$ _____.

【解析】 $a = 2$.

原式

$$= \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln x - \ln(2x+a) \Big|_1^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln x - \ln(2x+a) \Big|_1^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{2x+a} - \ln \frac{1}{2+a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+a} + \ln(2+a)$$

$$\therefore \ln \frac{1}{2} + \ln(2+a) = \ln 2$$

$$\ln(2+a) = 2 \ln 2 \Rightarrow a = 2$$

12. 曲线 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}$ 的渐近线方程为 _____.

【解析】 $y = x - 1$

可得无水平渐近线、铅直渐近线，故求斜渐近线即可.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x^2 + 1}{x^3}} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\left(1 + \frac{1 - 3x^2}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - 3x^2}{x^3} = -1 \end{aligned}$$

故 $y = x - 1$.

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \cdots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] = \text{_____}.$$

【解析】

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \cdots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \ln \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \ln \frac{n-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \ln \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \ln \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n} \ln \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \int_0^1 x \ln x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 x dx = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

14. 已知函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1+2t), \\ 2t - \int_1^{y+t^2} e^{-u^2} du = 0 \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】

$$\begin{cases} x = \ln(1+2t) \text{ ①,} \\ 2t - \int_1^{y+t^2} e^{-u^2} du = 0 \text{ ②,} \end{cases}$$

由②两边关于 t 求导, 则 $2 - e^{-(y+t^2)^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + 2t\right) = 0$.

当 $t = 0$ 时, $y = 1$, $2 - e^{-1} \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2e$.

$$\text{则 } \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\bigg|_{t=0} = \frac{2e}{2} = e.$$

15. 微分方程 $(2y-3x)dx + (2x-5y)dy = 0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3x^2 - 4xy + 5y^2 = 4$

【解析】

解:

$$\begin{aligned} (2y-3x)dx + (2x-5y)dy &= 0 \\ \Rightarrow 2ydx + 2xdy - 3xdx - 5ydy &= 0 \\ \Rightarrow d(2xy) - d\left(\frac{3}{2}x^2\right) - d\left(\frac{5}{2}y^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} d\left(2xy - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2\right) &= 0 \\ \Rightarrow 2xy - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 &= c \end{aligned}$$

又因为

$$y(1)=1$$

则

$$2-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=c,\Rightarrow c=-2$$

即

$$\begin{aligned}2xy-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2 &= -2 \\ 3x^2-4xy+5y^2 &= 4\end{aligned}$$

则所求方程为 $y = \frac{2x + \sqrt{20-11x^2}}{5}$.

16. 设矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, 若 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, 则方程组

$Ax = a_1 + 4a_4$ 的通解为 $x =$ _____.

【答案】 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, k 为任意常数

【解析】由于 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关; 且已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

则 $r(A) = 3$ 。那么 $Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 等价于 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 + 4\alpha_4$, 故 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是

$Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 的一个特解。又因为 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$, 即 $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0$, 则

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ 。由 $s = n - r(A) = 4 - 3 = 1$ 可得, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解

系, 故 $Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 的通解为

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数。}$$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$.

17. 解:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx &= \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}}{x^2-2x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{5} \ln |1+x| \Big|_0^1 - \frac{1}{10} \ln |x^2-2x+2| \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \arctan(x-1) \Big|_0^1 = \frac{3}{5} \ln 2 + \frac{1}{10} \pi. \end{aligned}$$

18. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - e^{2\sin x} + 1}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} = -3$.

证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

18 解:

$$\text{已知 } \ln(1+x) + \ln(1-x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$$

$$e^{2\sin x} = 1 + 2\sin x + \frac{1}{2}(2\sin x)^2 + o(x^2) = 1 + 2\sin x + 2\sin^2 x + o(x^2)$$

$$\text{因此, } -3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - e^{2\sin x} + 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - (1 + 2\sin x + 2\sin^2 x + o(x^2)) + 1}{-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2\sin x}{-x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{-x^2}$$

可以得出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2 \sin x}{-x^2} = -5$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2 \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)}{x^2} = 5$,

进一步可以得出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - 2x}{x^2} = 5$, 以及 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 5$,

$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - 2] = 0$, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$, 故 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 5$ 。

19. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x, y)$ 可微, 且满足 $df(x, y) = -2xe^{-y}dx + e^{-y}(x^2 - y - 1)dy$, $f(0, 0) = 2$, 求 $f(x, y)$, 并求 $f(x, y)$ 的极值.

19. 解:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-y} \Rightarrow f(x, y) = -x^2e^{-y} + \varphi(y). \text{ 则 } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{-y} + \varphi'(y) = e^{-y}x^2 - (y+1)e^{-y}$$

$$\text{则 } \varphi'(y) = -(y+1)e^{-y}$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = (y+2)e^{-y} + C$$

则

$$f(x, y) = -x^2e^{-y} + (y+2)e^{-y} + C$$

$$\text{又 } f(0, 0) = 2, \Rightarrow C = 0$$

$$\text{则 } f(x, y) = -x^2e^{-y} + (y+2)e^{-y}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-y}(x^2 - y - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

则驻点 $(0, -1)$

$$f_{xx} = -2e^{-y}, f_{xy} = 2xe^{-y}, f_{yy} = e^{-y}(x^2 - y - 1) - e^{-y} = e^{-y}(x^2 - y)$$

$$\text{在点 } (0, -1) \text{ 处 } A = -2e, B = 0, C = -e$$

则 $AC - B^2 > 0, A < 0$, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, -1)$ 处有极大值, 且极大值为

$$f(0, -1) = e$$

20. (本题满分 12 分)

已知平面有界区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \leq 4y\}$, 计算 $\iint_D (x-y)^2 dx dy$.

【答案】 $12\pi - \frac{16}{3}$

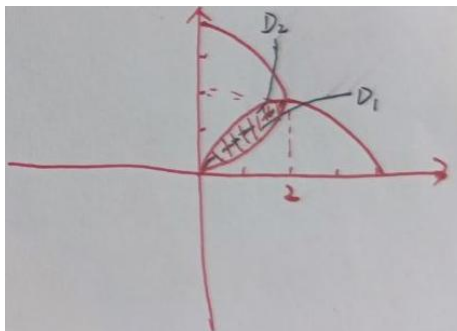
由题可知, 积分区域 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 2^2, x^2 + (y-2)^2 \leq 2^2\}$

对应图形为右图所示,

显然积分区域关于 $y = x$ 对称

记 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 2^2, y \leq x\}$

$D_2 = \{(x, y) | (x-2)^2 + y^2 \leq 2^2, y \geq x\}$



$$\begin{aligned} \text{故 } I &= \iint_D (x-y)^2 dx dy = \iint_{D_1} (x-y)^2 dx dy + \iint_{D_2} (x-y)^2 dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} (x-y)^2 dx dy \end{aligned}$$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 则在积分区域 D_1 上有
$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \cos \theta \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_{D_1} (x-y)^2 dx dy &= \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 2xy) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{4 \cos \theta} (r^2 - 2r^2 \cos \theta \sin \theta) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{4 \cos \theta} (r^3 - 2r^3 \cos \theta \sin \theta) dr = 6\pi - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

故 $I = 2(6\pi - \frac{8}{3}) = 12\pi - \frac{16}{3}$.

21. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导. 证明导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加的充分必要条件是:

对 (a, b) 内任意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

解: 充分性: 若对 (a, b) 内任意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 都有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

则在 (a, b) 内取任意的 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} < \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4}$$

在 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ 两边同时令 $x_2 \rightarrow x_1^+$, 得

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \text{ 两边同时令 } x_2 \rightarrow x_3^-, \text{ 得 } \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_3), \text{ 即}$$

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_3), \text{ 同理可得 } f'_+(x_3) \leq \frac{f(x_5) - f(x_3)}{x_5 - x_3} \leq f'_-(x_5). \text{ 因为}$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_5) - f(x_3)}{x_5 - x_3}, \text{ 所以 } f'_+(x_1) \leq f'_-(x_5). \text{ 由 } x_1, x_5 \text{ 的任意性, 可得 } f'(x) \text{ 在}$$

(a, b) 内严格单调递增, 充分性得证。

再证必要性, 即已知 $f'(x)$ 单调递增, 在 $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理,

知存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

又由 $f'(x)$ 单调递增, 且 $\xi_1 < \xi_2$ 知, $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \text{ 必要性得证。}$$

综上所述，充要条件得证。

22. (本题满分 12 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & a \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 合同.

(1) 求 a 的值及 k 的取值范围;

(2) 若存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = B$, 求 k 及 Q .

(1) A 与 B 合同知, 二者有相同的正负惯性指数

显然, B 的特征值为 $k, 6, 0$, 故 A 有特征值 0. 故 $|A| = 0$.

计算得 $|A| = -3(a - 4)$, 即有 $a = 4$.

此时 $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6)$.

知 A 的特征值为 3、6、0. $P=2$. 故 $k > 0$.

(2) 由 $Q^T A Q = B$, 知 $Q^{-1} A Q = B$.

故 A, B 相似, 特征值相同, 故 $k = 3$. 对 $A: \lambda = 3$ 时, 解 $(3E - A)X = 0$,

得 $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 6$ 时, 解 $(6E - A)x = 0$, 得 $c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$ 时, 解 $(0 \cdot E - A)x = 0$ 得 $c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

再单位化得: $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.