

2025 考研数学（一） 真题

试卷及解析

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1. 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin t dt$ ， $g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$ ，则

- A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，也是 $g(x)$ 的极值点．
- B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．
- C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．
- D. $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点， $(0,0)$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点．

【答案】B

【解析】

$$f'(x) = e^{x^2} \sin x, f''(x) = 2xe^{x^2} \sin x + e^{x^2} \cos x$$

$$f'(0) = 0, f''(0) = 1 > 0.$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点．

$$g'(x) = e^{x^2} \sin^2 x + \sin 2x \int_0^x e^{t^2} dt,$$

$$g''(x) = e^{x^2} \sin 2x + 2xe^{x^2} \sin^2 x + \sin 2xe^{x^2} + 2\cos 2x \int_0^x e^{t^2} dt$$

$$g'(0) = 0, g''(0) = 0, g'''(0) > 0.$$

$(0,0)$ 是 $y=g(x)$ 的拐点．

2. 已知级数: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1}$; ② $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$, 则

A. ①与②均条件收敛.

B. ①条件收敛, ②绝对收敛.

C. ①绝对收敛, ②条件收敛.

D. ①与②均绝对收敛.

【答案】B

【解析】

$$\left| \sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} \right| = \left| \sin \left(\frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} - n\pi \right) \right| = \left| \sin \frac{n}{n^2 + 1} \pi \right| \sim \frac{n}{n^2 + 1} \pi \sim \frac{1}{n} \pi.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\therefore$ 不是绝对收敛.

$$\sin \frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} = (-1)^n \sin \left(\frac{n^3 \pi}{n^2 + 1} - n\pi \right) = (-1)^n \sin \frac{n}{n^2 + 1} \pi, \text{ 为交错级数.}$$

$\sin \frac{n}{n^2 + 1} \pi$ 递减, $\therefore$ 条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right).$$

$$\left| (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \right| = \left| -\frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛 } \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \tan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \text{ 绝对收敛}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上可导, 则

A. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在.

B. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

C. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

D. 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ 存在.

【答案】D

【解析】A 错误, 反例:

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2}, \text{ 极限不存在.}$$

B 错误, 反例: $f(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 极限存在, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 极限

不存在.

C 错误, 反例:

$$f(x) = \cos x, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \text{ 存在, 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \text{ 不存在.}$$

D 正确, 用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1} = A$, 故选 D.

4. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x, y) dy =$

A. $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy.$

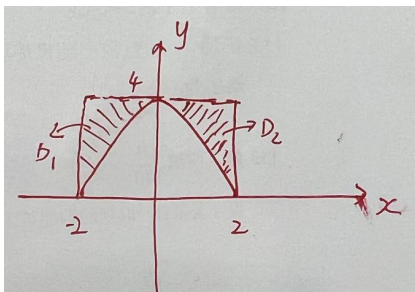
B. $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x, y) dx \right] dy.$

C. $\int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x, y) dx + \int_2^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx \right] dy.$

D. $2\int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)dx$.

【答案】A

【解析】由题易知，此二重积分积分区域为



$D = \{(x,y) | 4 - x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 2\}$ ，对应图像为上图所示。

记 $D_1 = \{(x,y) | 4 - x^2 \leq y \leq 4, -2 \leq x \leq 0\}$ ， $D_2 = \{(x,y) | 4 - x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2\}$ ，且

$$I = \int_{-2}^2 dx \int_{4-x^2}^4 f(x,y) dy, \text{ 则 } I = \iint_{D_1} f(x,y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y) d\sigma, \text{ 交换积分次序得}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 dy \int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y) dx + \int_0^4 dy \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y) dx \\ &= \int_0^4 \left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y) dx + \int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y) dx \right] dy \end{aligned}$$

故 A 正确。

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 的正惯性指数

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

【答案】B

【解析】

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\lambda E - A) &= \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda [\lambda(\lambda-1) - 1 - 1] \\ &= \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= \lambda(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

解得

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

故正惯性指数为 1, 选 B.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 n 维列向量, α_1, α_2 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \mathbf{0}$.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 关于 x, y, z 的方程组 $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = \alpha_4$ 的几何图形是

- A. 过原点的一个平面. B. 过原点的一条直线.
C. 不过原点的一个平面. D. 不过原点的一条直线.

【答案】D

【解析】记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 由 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 可得 $r(A) = 2$. 记 $\bar{A} = (A | \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 再由 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \mathbf{0}$, 则 $r(\bar{A}) = 2$. 于是 $Ax = \alpha_4$ 有无穷多解. 则 $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = \alpha_4$ 等价于 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (x, y, z)^T = \alpha_4$, 即 $A \cdot (x, y, z)^T = \alpha_4$. 若过原点, 则 $\alpha_4 = \mathbf{0}$ 与 α_1, α_2 线性无关矛盾, 故不过原点.

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 = \alpha_4 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{14} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = a_{24} \\ \dots \\ a_{n1}x + a_{n2}y + a_{n3}z = a_{n4} \end{cases}, \text{ 由上述分析可知 } r(A) = r(\bar{A}) = 2, \text{ 故}$$

两平面交于一条直线, 且不过原点. 故选 D.

7. 设 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $r(A) + r(B) + r(C) = r(ABC) + 2n$, 给出下列四个结论:

① $r(ABC) + n = r(AB) + r(C)$;

② $r(AB) + n = r(A) + r(B)$;

③ $r(A) = r(B) = r(C) = n$;

④ $r(AB) = r(BC) = n$.

其中正确结论的序号是

A. ①②.

B. ①③.

C. ②④.

D. ③④.

【答案】A

【解析】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = E$, 满足 $r(A) + r(B) + r(C) = r(ABC) + 2n$, 则

$r(A) = 1, r(B) = 1, r(C) = 2$, 排除结论③④, 故选 A.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(0, 0; 1, 1; \rho)$, 其中 $\rho \in (-1, 1)$. 若 a, b 为满足

$a^2 + b^2 = 1$ 的任意实数, 则 $D(aX + bY)$ 的最大值为

A. 1.

B. 2.

C. $1 + |\rho|$.

D. $1 + \rho^2$.

【答案】C

【解析】

$$D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2ab\rho \cdot 1 \cdot 1$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\rho = 1 + 2ab\rho = 1 + 2a\sqrt{1-a^2}\rho = f(a)$$

$$f'(a) = \rho \left(2\sqrt{1-a^2} + 2a \cdot \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} \right) = 2\rho \left(\sqrt{1-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} \right) = 0$$

即 $2\rho \cdot \frac{1-a^2-a^2}{\sqrt{1-a^2}} = 0$, $2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}, b^2 = \frac{1}{2}$, 于是 $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。所以最大

值为 $1+|\rho|$, 故选 C。

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ 是来自总体 $B(1, 0.1)$ 的简单随机样本. 令 $T = \sum_{i=1}^{20} X_i$, 利用泊松分布近

似表示二项分布的方法可得 $P\{T \leq 1\} \approx$

A. $\frac{1}{e^2}$.

B. $\frac{2}{e^2}$.

C. $\frac{3}{e^2}$.

D. $\frac{4}{e^2}$.

【答案】C

【解析】由题意可知 $T \sim B(20, 0.1). np = 20 \times 0.1 = 2$

$$P\{T \leq 1\} = P\{T = 0\} + P\{T = 1\} = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} = e^{-2} + 2e^{-2} = \frac{3}{e^2}$$

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu, 2)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, Z_α 表示标

准正态分布的上侧 α 分位数. 假设检验问题: $H_0: \mu \leq 1, H_1: \mu > 1$ 的显著性水平为 α 的检验的拒绝域为

A. $\left\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \frac{2}{n} Z_\alpha \right\}$.

B. $\left\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} Z_\alpha \right\}$.

C. $\left\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} Z_\alpha \right\}$.

D. $\left\{ (X_1, X_2, \dots, X_n) \mid \bar{X} > 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} Z_\alpha \right\}$.

【答案】D

【解析】 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\alpha} \Rightarrow \bar{X} > \sqrt{\frac{2}{n}} z_{\alpha} + 1$, 故选 D

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x \cdot \ln(1-x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】-1

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{-x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{-x \ln x} = -1$$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$

的和函数, 则 $S\left(-\frac{7}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】

$$s\left(-\frac{7}{2}\right) = s\left(-\frac{7}{2} + 4\right) = s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

13. 已知函数 $u(x, y, z) = xy^2z^3$, 向量 $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$, 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】1

【解析】由题易知， $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3, \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2$

则在 $x=1, y=1, z=1$ 处有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (1, 2, 3)$

对于向量 $\vec{n} = (2, 2, -1)$ ，归一化可得 $\vec{n}_0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

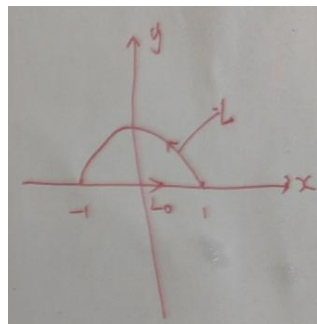
$$\text{故 } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{(1,1,1)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \vec{n}_0 = (1, 2, 3) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

14. 已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的一段，则曲线积分

$$\int_L (y + \cos x)dx + (2x + \cos y)dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{4}{3} - 2\sin 1$

【解析】由题易知可作曲线如右图所示.



记 L_0 是从 $x=-1$ 到 $x=1$ 的直线，

并记曲线积 $I = \int_L (y + \cos x)dx + (2x + \cos y)dy$

则在 L_0 与 L 所围的封闭区域可用格林公式

$$\text{即 } I_1 = \oint_{L_0+L} (y + \cos x)dx + (2x + \cos y)dy$$

$$= \iint_D 2 - 1 d\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} dy = \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$\text{又 } I_2 = \int_{L_0} (y + \cos x)dx + (2x + \cos y)dy = \int_{-1}^1 \cos x dx = 2\sin 1, \text{ 故 } I = \frac{4}{3} - 2\sin 1$$

15. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{pmatrix}$, 若方程组 $A^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $A \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 不同解，则 $a-b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -4

【解析】由题知， $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{pmatrix}$ ，若 $A^2x = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解，则三秩相同，即

$r(A) = r(A^2) = r \begin{pmatrix} A \\ A^2 \end{pmatrix}$ 。如果 A 可逆，三秩显然相同，则 $A^2x = 0$ 与 $Ax = 0$ 同解，于

是要想 $A^2x = 0$ 与 $Ax = 0$ 不同解，即 A 不可逆，于是 $|A| = 0$ 。根据行列式的倍加性质易得

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ a & 3 & -4 \\ b & 5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ a & 3 & -1 \\ b & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ a & 1 & -1 \\ b & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2+1) - (a-b), \text{ 令 } |A| = 0,$$

有 $a-b = -4$ 。

16. 设 A, B 为两个随机事件，且 A 与 B 相互独立，已知 $P(A) = 2P(B), P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ ，则在事件 A, B 至少有一个发生的条件下， A, B 中恰有一个发生的概率为_____。

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】 $P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB)$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{5}{8}, \Rightarrow 3P(B) - 2P^2(B) = \frac{5}{8}$$

$$24P(B) - 16P^2(B) = 5, 16P^2(B) - 24P(B) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (4P(B) - 1)(4P(B) - 5) = 0$$

$$P(B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$.

17. 解：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx &= \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}}{x^2-2x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{5} \ln |1+x| \Big|_0^1 - \frac{1}{10} \ln |x^2-2x+2| \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \arctan(x-1) \Big|_0^1 = \frac{3}{5} \ln 2 + \frac{1}{10} \pi. \end{aligned}$$

18. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内具有 2 阶导数，记 $g(x, y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ ，若 $g(x, y)$ 满足

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1, \text{ 且 } g(x, y) = 1, \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x,x)} = \frac{2}{x}, \text{ 求 } f(u).$$

解：

$$\text{令 } u = \frac{x}{y}, \text{ 则 } \frac{\partial g}{\partial x} = f'(u) \frac{1}{y}, \frac{\partial g}{\partial y} = f'(u) \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$

$$\text{又 } g(x, x) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(1) = 1, \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x,x)} = f'(1) \frac{1}{x} = \frac{2}{x}, \text{ 故 } f'(1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \left(f''(u) \frac{1}{y} \right) \frac{1}{y} = f''(u) \frac{1}{y^2} \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = f''(u) \left(-\frac{x}{y^2} \right) \frac{1}{y} + f'(u) \left(-\frac{1}{y^2} \right) = -\frac{x}{y^3} f''(u) - \frac{1}{y^2} f'(u) \dots(2)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = f''(u) \left(-\frac{x}{y^2} \right) \frac{x}{y} + f'(u) \left(\frac{2x}{y^2} \right) = \frac{x^2}{y^4} f''(u) + \frac{2x}{y^3} f'(u) \dots(3)$$

将 (1) (2) (3) 代入 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$ 化简得:

$$u^2 f''(u) + u f'(u) = 1, \text{ 即 } f''(u) + \frac{1}{u^2} f'(u) = \frac{1}{u^2}.$$

$$\text{令 } p' = f'(u) \text{ 则 } p'' + \frac{1}{u} p' = \frac{1}{u^2}$$

$$p = e^{-\int \frac{1}{u} du} \left[\int \frac{1}{u^2} e^{\int \frac{1}{u} du} du + C \right] = \frac{1}{u} \left[\int \frac{1}{u} du + C \right] = \frac{\ln u}{u} + \frac{C}{u}$$

$$\text{又 } p'|_{u=1} = C = 2, \text{ 故 } p = \frac{\ln u}{u} + \frac{2}{u}$$

$$\text{因此, } \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\ln u}{u} + \frac{2}{u}, \text{ 积分得 } f(u) = \int \left(\frac{\ln u}{u} + \frac{2}{u} \right) du = \frac{1}{2} \ln^2 u + 2 \ln u + C,$$

$$\text{又 } f(1) = C = 1, \text{ 故 } f(u) = \frac{1}{2} \ln^2 u + 2 \ln u + 1.$$

19. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导. 证明导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加的充分必要条

件是: 对 (a, b) 内任意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

解: 充分性: 若对 (a, b) 内任意的 x_1, x_2, x_3 , 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, 都有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(a, b) 内取任意的 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$, 有
则在

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} < \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4}$$

在 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ 两边同时令 $x_2 \rightarrow x_1^+$, 得

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \text{ 两边同时令 } x_2 \rightarrow x_3^-, \text{ 得 } \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_3), \text{ 即}$$

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq f'_-(x_3), \text{ 同理可得 } f'_+(x_3) \leq \frac{f(x_5) - f(x_3)}{x_5 - x_3} \leq f'_-(x_5). \text{ 因为}$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_5) - f(x_3)}{x_5 - x_3}, \text{ 所以 } f'_+(x_1) \leq f'_-(x_5). \text{ 由 } x_1, x_5 \text{ 的任意性, 可得 } f'(x) \text{ 在}$$

(a, b) 内严格单调递增, 充分性得证。

再证必要性, 即已知 $f'(x)$ 单调递增, 在 $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上分别使用拉格朗日中值定理,

知存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

又由 $f'(x)$ 单调递增, 且 $\xi_1 < \xi_2$ 知, $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \text{ 必要性得证。}$$

综上所述, 充要条件得证。

20. (本题满分 10 分)

设 Σ 是由直线 $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=t \end{cases}$ (t 为参数) 旋转一周得到的曲面, Σ_1 是 Σ 介于平面

$x+y+z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧, 计算曲面侧积分

$$I = \iint_{\Sigma_1} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy.$$

解: 由题意可知直线 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, 记为 l_1 ; $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$, 记为 l_2 , 则直线 l_1 绕直线 l_2 旋转所得曲

面 Σ 为 $(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 3t^2$ 。已知 Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 和平面 $x+y+z=1$ 之间的外侧, 则补面 $\Sigma_0: x+y+z=1$, 方向指向外侧。则 Σ_0 与 Σ_1 所围为封闭区域, 则由高斯公式可知

$$\begin{aligned} I_1 &= \oiint_{\Sigma_0 + \Sigma_1} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} (1+1+1) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \quad (\text{注: } \Omega \text{ 为圆锥体})。 \end{aligned}$$

记 D_{xy} 为 Σ_0 在 xoy 面上的投影, $D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\begin{aligned} \text{又 } I_2 &= \iint_{\Sigma_0} x dy dz + (y+1) dz dx + (z+2) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} x dx dy + (y+1) dx dy + (3-x-y) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

故 $I = I_1 - I_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1$.

21. (本题满分 10 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 已知 1 是 A 的特征多项式的重根.

(1) 求 a 的值;

(2) 求所有满足 $A\alpha = \alpha + \beta$, $A^2\alpha = \alpha + 2\beta$ 的非零列向量 α , β .

解: (1) $f(\lambda) = |A - \lambda E| = (1 - \lambda)[(\lambda - a)(\lambda + 1) + 4]$

可得 $(1 - a)(1 + 1) + 4 = 0$, $a = 3$

(2) 由 (1) 可知 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $|A - \lambda E| = 0$, 得 A 中 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

$$A\alpha = \alpha + \beta, A^2\alpha = \alpha + 2\beta \Rightarrow (A - E)\alpha = \beta, (A^2 - E)\alpha = 2\beta = 2(A - E)\alpha$$

$(A - E)^2\alpha = 0$, 其中 $(A - E)^2 = 0$, 故 α 为任意的非零向量, $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $a_1 a_2 a_3 \neq 0$

$$\Rightarrow \beta = (A - E)\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_3 - a_1 - a_2 \\ 2a_3 - a_1 - a_2 \\ 2a_3 - a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

其中 $a_1 + a_2 \neq 2a_3$

$$\text{则综上 } \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2a_3 - a_1 - a_2 \\ 2a_3 - a_1 - a_2 \\ 2a_3 - a_1 - a_2 \end{pmatrix}, (a_1 a_2 a_3 \neq 0, a_1 + a_2 \neq 2a_3)$$

22. (本题满分 12 分)

投保人的损失事件发生时，保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq 100, \\ x-100, & X > 100. \end{cases} \quad \text{设定损事件发生时，投保人的损失额 } X \text{ 的概率密度为}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) 求 $P\{Y > 0\}$ 及 EY .

(2) 这种损失事件在一年内发生的次数记为 N ，保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M ，假设 N 服从参数为 8 的泊松分布，在 $N = n$ ($n \geq 1$) 的条件下， M 服从二项分布 $B(n, p)$ ，其中 $p = P\{Y > 0\}$ ，求 M 的概率分布.

解：

$$(1) P\{Y > 0\} = P\{X - 100 > 0\} = P\{X > 100\} = \int_{100}^{+\infty} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx = \frac{1}{4}$$

$$EY = \int_{100}^{+\infty} (x-100) \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3} dx = 50$$

(2)

$$N \sim P(8) = \{M \mid N = n\} \sim B\left(n, \frac{1}{4}\right)$$

$$P\{M = m\} = \sum_{n=m}^{\infty} P\{N = n\} \cdot P\{M = m \mid N = n\}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^n}{n!} e^{-8} \cdot C_n^m \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^n}{n!} e^{-8} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8} \frac{8^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{8^{n-m}}{(n-m)!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^m e^{-8} \frac{8^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{6^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{2^m}{m!} e^{-2}$$
